Traitement statistique du signal

TP 4 : Filtres de Wiener, débruitage d'image et de son

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Signal, Images et Multimédia - 2ème année

2013-2014

A préparer à la maison

Supposons que l'on dispose d'une image originale $X(m,n)$ corrompue par un bruit $W(m,n)$ Gaussien non corrélé au signal $X(m,n)$, de moyenne nulle et de variance σ^2. L'image observée est donc

$$Y(m,n) = X(m,n) + W(m,n)$$

On notera respectivement $\mu_X(m,n)$ et $\sigma_X^2(m,n)$ la moyenne et la variance du pixel (m,n) dans l'image X.

1. Calculer $\mu_Y(m,n)$ et $\sigma_Y^2(m,n)$ en fonction de $\mu_X(m,n)$, $\sigma_X^2(m,n)$ et σ^2.
2. Donner alors l'expression du filtre de Wiener (non-causal) associé à $X(m,n)$, et en déduire une estimation $\hat{X}(m,n)$ à partir de $Y(m,n)$, $\mu_X(m,n)$, $\sigma_X^2(m,n)$ et σ^2.

1 Exercice 1

Le but de cet exercice est de débruiter une image corrompue par un bruit blanc Gaussien grâce à un filtre de Wiener adaptatif. On suppose donc que l'on dispose d'une image originale $X(m,n)$ corrompue par un bruit $W(m,n)$ Gaussien non corrélé au signal $X(m,n)$, de moyenne nulle et de variance σ^2. L'image observée est donc

$$Y(m,n) = X(m,n) + W(m,n)$$

On notera respectivement $\mu_X(m,n)$ et $\sigma_X^2(m,n)$ la moyenne et la variance du pixel (m,n) dans l'image X. L'idée va être d'estimer $X(m,n)$ à partir de $Y(m,n)$ et de la valeur (supposée connue) de la variance du bruit σ^2.

1. Calculer $\mu_Y(m,n)$ et $\sigma_Y^2(m,n)$ en fonction de $\mu_X(m,n)$, $\sigma_X^2(m,n)$ et σ^2.
2. Donner alors l'expression du filtre de Wiener (non-causal) associé à $X(m,n)$, et en déduire une estimation $\hat{X}(m,n)$ à partir de $Y(m,n)$, $\mu_X(m,n)$, $\sigma_X^2(m,n)$ et σ^2.

Les quantités $\mu_X(m,n)$ et $\sigma_X^2(m,n)$ seront estimées sur un voisinage carré de taille $2L+1 \times 2L+1$ autour du pixel (m,n) grâce aux formules suivantes:

$$\hat{\mu}_X(m,n) = \frac{1}{(2L+1)^2} \sum_{i=-L}^{L} \sum_{j=-L}^{L} X(m-i, n-j)$$

$$\hat{\sigma}_X^2(m,n) = \frac{1}{(2L+1)^2 - 1} \sum_{i=-L}^{L} \sum_{j=-L}^{L} X^2(m-i, n-j) - \hat{\mu_X}^2(m,n)$$

3. On pose ici $\sigma^2 = 0.01$ et $L = 3$.
   (a) Ouvrir l'image `lena.bmp` grâce à la fonction Matlab `imread` et la visualiser en nuances de gris grâce à la fonction Matlab `imagesc`.
   (b) Normaliser la valeur des pixels pour que leurs valeurs soient comprises entre 0 et 1.

(c) Construire l'image Y et la visualiser en nuances de gris.

(d) Calculer les quantités $\hat{\mu}_X(m,n)$ et $\hat{\sigma}_X^2(m,n)$.

(e) Calculer la reconstruction $\hat{X}$ et la visualiser en nuances de gris.

4. Relancer la simulation pour différentes valeurs de L et commenter.

5. Relancer la simulation pour différentes valeurs de σ^2 et commenter.

6. En pratique, on ne dispose en général que de Y et les estimations $\hat{\mu}_X(m,n)$ et $\hat{\sigma}_X^2(m,n)$ doivent être faites à partir de $\hat{\mu}_Y(m,n)$ et $\hat{\sigma}_Y^2(m,n)$.
   (a) Modifier la simulation précédente pour que ces quantités soient estimées sur Y et commenter.
   (b) Relancer cette simulation pour différentes valeurs de L et σ^2 et commenter.

2 Exercice 2

Le but de cet exercice est de débruiter un signal sonore corrompu par du bruit blanc Gaussien grâce à une approche itérative de filtrage de Wiener. On suppose donc que l'on dispose d'un son original x corrompu par un bruit blanc Gaussien w de moyenne nulle et de variance σ^2. Le signal observé est donc

$$y = x + w$$

Si l'on suppose que le bruit et le signal original ne sont pas corrélés, le filtre (non-causal) de Wiener peut s'écrire

$$H(f) = \frac{S_{XX}(f)}{S_{YY}(f)} = \frac{S_{XX}(f)}{S_{XX}(f) + \sigma^2}$$

donnant un signal reconstruit

$$\hat{x} = TF^{-1}\left\{H(f) \times TF\left\{y\right\}\right\}$$

On rappelle qu'une méthode courante pour estimer la densité spectrale de puissance d'un signal est le périodogramme (cf TP 2), que l'on peut calculer grâce à la fonction `periodogramme.m` fournie.

1. (a) Ouvrir le fichier son `murder.wav` et l'écouter
   (b) Créer le signal bruité y (on prendra $\sigma^2 = 0.001$) et l'écouter

2. (a) Estimer $S_{YY}(f)$ en calculant le périodogramme de y. En déduire une estimation de $S_{XX}(f)$.
   (b) Former le filtre de Wiener $H(f)$ et calculer le signal reconstruit $\hat{x}$
   (c) Ecouter le résultat et commenter

3. Une façon d'améliorer les résultats est d'itérer le processus plusieurs fois en estimant à chaque fois $S_{XX}(f)$ grâce au périodogramme du signal $\hat{x}$ reconstruit à l'itération précédente.
   (a) En partant du signal $\hat{x}$ calculé à la question 2, estimer une nouvelle fois $S_{XX}(f)$ et en déduire une nouvelle reconstruction $\hat{x}^{(1)}$. Ecouter le résultat et commenter
   (b) Réitérer cette étape 10000 fois, écouter le résultat et commenter.