Traitement statistique du signal
TD 1 : Variables et vecteurs aléatoires

Université Paris 13, Institut Galilée
Master Signal, Images et Multimédia - $2^{\text{ème}}$ année

2013-2014

1 Exercice 1

Soient a un réel et f la fonction définie sur $[0, 1]$ par:

$$f(x) = ax(1-x)$$

1. Déterminer la valeur de a pour que cette fonction soit une loi de densité de probabilité.
2. On considère X une variable aléatoire continue de densité f avec a ayant la valeur trouvée ci-dessus. Calculer la moyenne, la variance et les moments d'ordre n de X.

2 Exercice 2

Soit la densité de probabilité jointe de 2 variables aléatoires X et Y:

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & \text{si } a \leq x, y \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de k pour que cette fonction soit une loi de densité de probabilité.
2. Trouver les lois de densité de probabilité marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $a = 0$ et $b = 1$. Donner l'expression des lois de densité de probabilité conditionnelles $p_{X|Y}(x|y)$ et $p_{Y|X}(y|x)$.
5. En déduire l'expression des espérances conditionnelles $E\{X|Y=y\}$ et $E\{Y|X=x\}$.

3 Exercice 3

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et a et b deux réels. On définit $Z = aX + bY$. Calculer $\mathrm{var}(Z)$ en fonction de $\mathrm{var}(X)$, $\mathrm{var}(Y)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$.
2. En posant $b = 1$, montrer que
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a^2\,\mathrm{var}(X) + 2a\,\mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{var}(Y) \geq 0$$
3. En déduire l'inégalité de Schwartz
$$\mathrm{cov}(X,Y)^2 \leq \mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)$$
4. Montrer que si $X_1, \ldots, X_N$ sont N variables aléatoires réelles et $a_1, \ldots, a_N$ N réels alors on a
$$\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j\,\mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

4 Exercice 4

Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire Gaussien de dimension p, de moyenne $\boldsymbol{\mu}$, de matrice de covariance $\mathbf{C}$ et de loi conjointe

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

1. Montrer que pour tout vecteur $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^p$, la variable aléatoire $Y = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{X}$ suit une loi normale de moyenne $\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu}$ et de variance $\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\omega}$.

2. En déduire l'expression de la fonction caractéristique du vecteur Gaussien $\mathbf{X}$: $\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}) = E\left\{e^{j\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{X}}\right\}$.

Rappel : la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 s'écrit:

$$\Phi_X(\omega) = E\left\{e^{j\omega X}\right\} = \exp\left\{j\omega\mu - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right\}$$

.