Théorie du signal

Transformée de Fourier - Densités spectrales

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année
2019-2020

Plan du cours

1. Cas des signaux à énergie finie
1.1 Lien avec la série de Fourier
1.2 Définition
1.3 Propriétés
1.4 Densité spectrale d'énergie

2. Cas des distributions
2.1 Dirac
2.2 Peigne de Dirac

3. Cas des signaux périodiques
3.1 Lien avec les séries de Fourier
3.2 Autre vision de la transformée de Fourier
3.3 Densité spectrale de puissance

4. Cas des signaux à puissance finie
4.1 Fonction échelon
4.2 Fonction signe
4.3 Densité spectrale de puissance

Extension de la série de Fourier

- Nous avons, grâce à la notion de produit scalaire, pu définir une décomposition unique des signaux périodiques continus sur une base de Fourier
- Pourrait-on étendre ceci pour des signaux à énergie finie ou des signaux à puissance finie pas nécessairement périodiques ?
- La réponse est oui (cf cours ITS) : la transformée de Fourier est en réalité une généralisation de ce type de décomposition
- Au lieu d'observer le comportement du signal pour des fréquences $f_k = \frac{k}{T}$ on va observer l'ensemble des fréquences

Sommaire

Cas des signaux à énergie finie

1.1 Lien avec la série de Fourier
1.2 Définition
1.3 Propriétés
1.4 Densité spectrale d'énergie

Signaux à énergie finie

- On considère dans cette partie du cours l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des signaux à énergie finie
- On peut définir sur cet espace le produit scalaire suivant

$$\boxed{\langle x \mid y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt}$$

- Peut-on procéder comme pour les signaux périodiques, et définir une base de Fourier ? La réponse est non dans le cas général... car une exponentielle complexe n'est pas un signal à énergie finie

Signaux à support temporel borné

- Considérons un signal à énergie finie mais également à support temporel borné $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$
- Dans ce cas, on peut considérer la base

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \Phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

- Cette base est orthonormale, et les $\Phi_k(t)$ sont à support temporel borné donc à énergie finie (démontré au TD 2)

Signaux à support temporel borné

- Si $x(t)$ est un signal de $\mathcal{L}^2\left(\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right], \mathbb{C}\right)$ on peut donc le décomposer comme

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

  avec

$$c_k(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt$$

- Oui, mais si le support temporel n'est pas borné ? Si le support temporel est $\mathbb{R}$ et pas $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right]$?
- Solution : il faut faire tendre T vers $+\infty$

Signaux à support temporel borné

Que se passe-t-il lorsque $T \to +\infty$?

- L'ensemble dénombrable des fréquences $f_k = \frac{k}{T}$ devient un continuum de fréquences f
- Observer toutes les fréquences multiples de $\frac{1}{T}$ revient à observer toutes les fréquences $f \in \mathbb{R}$
- En faisant tendre T vers $+\infty$, le coefficient de Fourier devient

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi f t} dt}$$

- C'est la **transformée de Fourier**

Transformée de Fourier

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie, on appelle **transformée de Fourier** et on note $X(f)$ la quantité

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi f t} dt}$$

- On écrit parfois
$$X(f) = \mathcal{TF}\left\{x(t)\right\}$$
- $X(f)$ est une quantité complexe qui rend compte du poids de la fréquence f dans la décomposition
- Contrairement à la série de Fourier, on s'interesse ici à toutes les fréquences $f \in \mathbb{R}$

Transformée de Fourier inverse

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie, il peut être reconstruit grâce à la **transformée de Fourier inverse** sous la forme

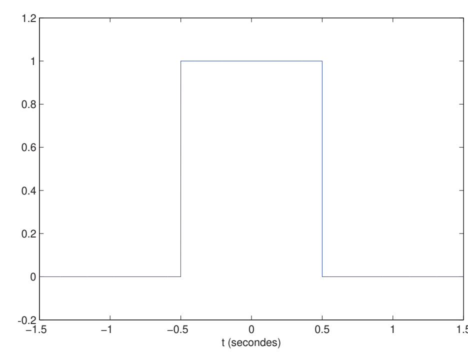
$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi f t} df}$$

- On écrit parfois
$$x(t) = \mathcal{TF}^{-1}\left\{X(f)\right\}$$
- Ceci peut être interprété comme une décomposition du signal sous la forme d'une somme continue et infinie de sinusoïdes complexes
- Si le signal $x(t)$ comporte une discontinuité en t_0, la reconstruction grâce à la transformée de Fourier inverse vaut
$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi f t_0} df = \frac{x(t_0^+) + x(t_0^-)}{2}$$

Interprétation

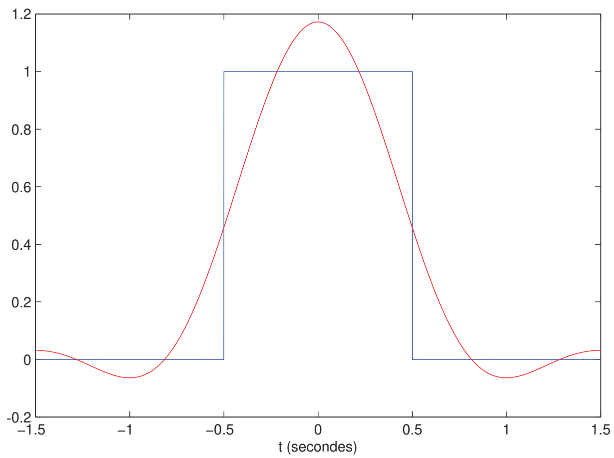
- Même si l'on ne peut pas définir ici de produit scalaire, l'interprétation reste la même : il s'agit de voir cette transformée de Fourier comme une façon de décomposer le signal
- Au lieu de sommer uniquement des harmoniques comme pour les signaux périodiques, on somme ici sur toutes les fréquences
- Le module $|X(f)|$ est lié à l'amplitude de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans la décomposition de $x(t)$ comme une somme infinie de sinusoïdes. Si cette quantité est élevée, c'est que la sinusoïde de fréquence fondamentale f a une place importante dans la décomposition de $x(t)$.
- L'argument $\arg\left\{X(f)\right\}$ est lié au déphasage de la sinusoïde de fréquence fondamentale f dans la décomposition de $x(t)$ comme une somme infinie de sinusoïdes.
- Seules les fréquences positives ont un vrai sens physique

Exemple : Signal porte



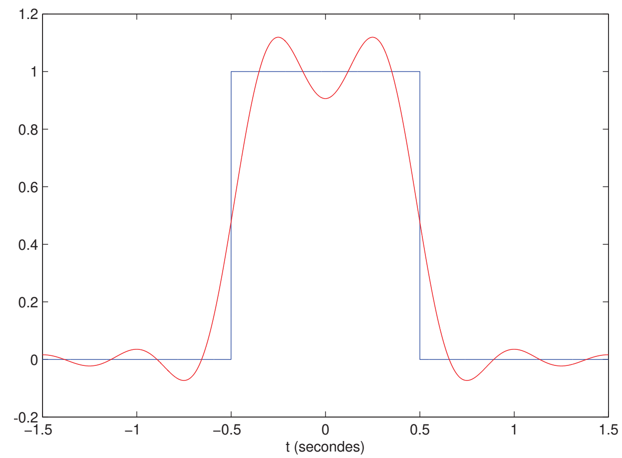
- Signal porte sur $[-0.5, 0.5]$: énergie finie

Exemple : Signal porte



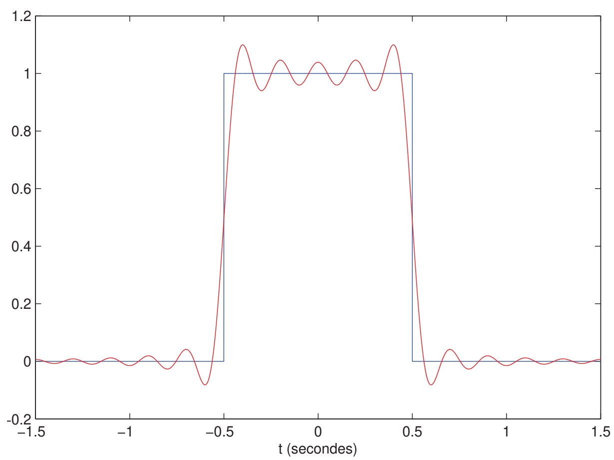
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 1]$ Hz

Exemple : Signal porte



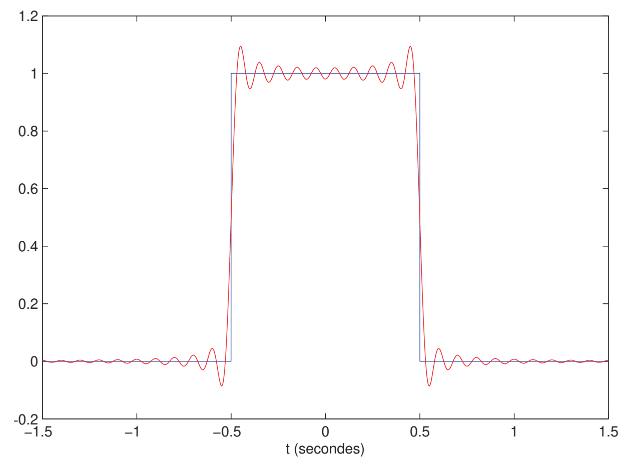
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 3]$ Hz

Exemple : Signal porte



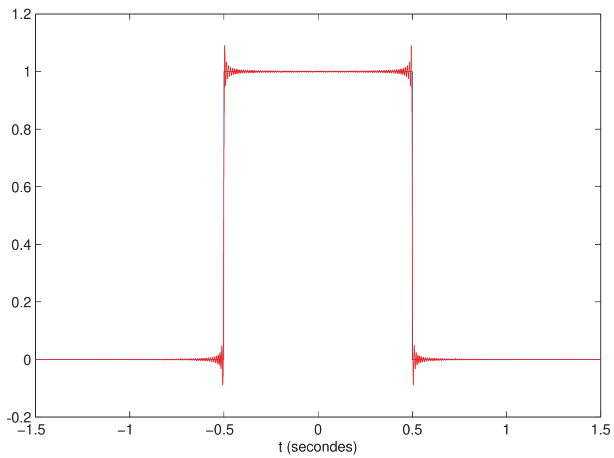
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 5]$ Hz

Exemple : Signal porte



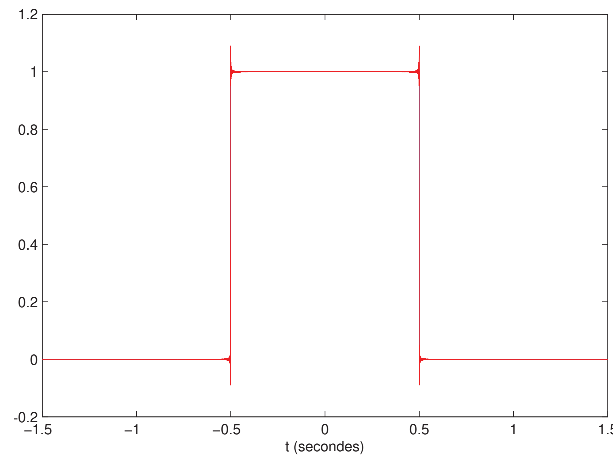
Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 10]$ Hz

Exemple : Signal porte



Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 100]$ Hz

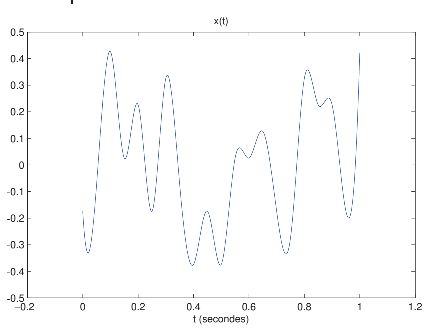
Exemple : Signal porte

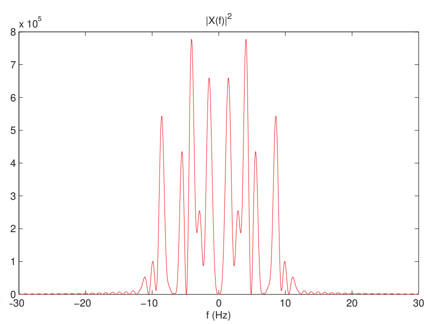


Contributions des sinusoïdes ayant des fréquences fondamentales $f \in [0, 1000]$ Hz

Notion de spectre

- Comme $X(f)$ est une quantité complexe, on trace en général la quantité $|X(f)|^2$ appelée **spectre**.
- Ceci permet d'étudier l'amplitude des différentes sinusoïdes dans la décomposition





Composante continue

- Lorsque que nous avions étudié la série de Fourier, nous avions vu que la composante $c_0(x)$ avait un rôle particulier. Elle correspondait à la composante $e^{j\frac{2\pi \times 0}{T}t} = 1$ qui ne variait pas avec le temps
- De la même façon, la composante en $f = 0$ de la transformée de Fourier correspond à la composante constante du signal : on l'appelle la **composante continue**

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

Propriétés de la TF : signaux réels

- Nous avons déjà démontré un grand nombre de propriétés de la transformée de Fourier dans le cours d'ITS
- Parmi elle, l'une des propriétés fondamentales concerne les signaux réels, pour lesquels la transformée de Fourier possède une symétrie hermitienne

$$x(t) \text{ réel } \Leftrightarrow X(-f) = X^*(f)$$

- Cela signifie que si $x(t)$ est réel, on a $|X(-f)|^2 = |X(f)|^2$. Le spectre est donc toujours pair, et il suffit donc de regarder ce qui se passe pour les fréquences postives (qui ont un sens physique)

Parité/Imparité

- On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\left\{x(-t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\; e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; e^{-j2\pi(-f)t} dt \\ &= X(-f) \end{aligned}$$

- Donc si $x(t)$ est pair on a $x(-t) = x(t)$, et par unicité de la transformée de Fourier on a
$$X(-f) = X(f)$$
- De la même façon $x(t)$ est impair on a $x(-t) = -x(t)$ donc
$$X(-f) = -X(f)$$

Parité/Imparité

- Si $x(t)$ est réel et pair on a donc

$$\begin{cases} X(-f) &= X^*(f) \\ X(-f) &= X(f) \end{cases} \Rightarrow X(f) \text{ réelle et paire}$$

- Si $x(t)$ est réel et impair on a donc

$$\begin{cases} X(-f) &= X^*(f) \\ X(-f) &= -X(f) \end{cases} \Rightarrow X(f) \text{ imaginaire pure et impaire}$$

Propriétés de la TF

$x(t)$ réel	$X(-f) = X^*(f)$ (symétrie hermitienne)
$x(t)$ réel et pair	$\begin{cases} X(f) \in \mathbb{R} & \text{réel} \\ X(-f) = X(f) & \text{pair} \end{cases}$
$x(t)$ réel et impair	$\begin{cases} X(f) \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^* & \text{imaginaire pur} \\ X(-f) = -X(f) & \text{impair} \end{cases}$

Transformations et TF

- Nous avons déjà vu dans le cours d'ITS que les transformations usuelles sur les signaux avaient des conséquences dans le domaine de Fourier
- Nous avions en particulier vu les propriétés suivantes
  - Linéarité
  - Produit
  - Produit de convolution
  - Translation
  - Modulation
- Nous allons dans ce cours en décrire trois supplémentaires
  - Contraction/dilatation
  - Dérivation
  - Intégration

Propriétés déjà vues en ITS

Linéarité	$z(t) = \lambda x(t) + \mu y(t)$	$Z(f) = \lambda X(f) + \mu Y(f)$
Translation	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
Modulation	$y(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$Y(f) = X(f - f_0)$
Produit	$z(t) = x(t) \times y(t)$	$Z(f) = X(f) * Y(f)$
Produit de convolution	$z(t) = x(t) * y(t)$	$Z(f) = X(f) \times Y(f)$

Contraction/dilatation

- Soit un réel α non nul, et $x(t)$ un signal à énergie finie. Si l'on définit

$$y(t) = x(\alpha t)$$

alors on a

$$\boxed{Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)}$$

- Donc si l'on réalise une contraction dans le domaine temporel $\alpha > 1$, on obtient une dilatation dans le domaine des fréquences (car $\frac{1}{\alpha} < 1$)... et inversement

Démonstration en exercice

Dérivation

- Soit $x(t)$ un signal à énergie finie, dérivable et tel que $x'(t)$ soit à énergie finie. Dans ce cas

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{x'(t)\right\} = (j2\pi f)\, X(f)}$$

- On peut étendre cette propriété avec des dérivées d'ordre supérieur. Soit $x(t)$ un signal à énergie finie et n fois dérivable. Si $x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$ est d'énergie finie, alors

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{x^{(n)}(t)\right\} = (j2\pi f)^n\, X(f)}$$

Dérivation : démonstration

- Si $x(t)$ est à énergie finie et dérivable

$$x'(t) = \frac{d\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft} df\right]}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (j2\pi f) X(f)\ e^{j2\pi ft} df$$

- Si $x'(t)$ est à énergie finie, elle admet une transformée de Fourier, et par unicité de la décomposition on a bien

$$\mathcal{TF}\left\{x'(t)\right\} = (j2\pi f)\, X(f)$$

Intégration

- Soit $x(t)$ un signal à énergie finie, intégrable sur $\mathbb{R}$ et ayant une composante continue nulle

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$$

- Si l'on note

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

et si $y(t)$ admet une transformée de Fourier, alors

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{y(t)\right\} = \frac{1}{(j2\pi f)} X(f)}$$

Intégration : démonstration

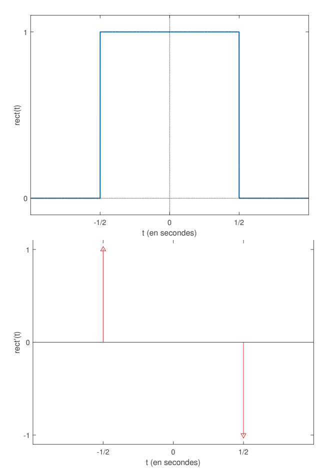
- On a $y'(t) = x(t)$ donc d'après les propriétés de la dérivation on a

$$(j2\pi f) Y(f) = X(f)$$

- On vérifie bien que ceci est possible car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = X(0) = 0$$

Exemple



- Considérons la fonction rectangulaire. On peut définir une dérivée au sens des distributions

$$\text{rect}'(t) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Le signal $\text{rect}'(t)$ a une composante continue nulle on a donc

$$\mathcal{TF}\left\{\text{rect}(t)\right\} = \frac{1}{j2\pi f} \mathcal{TF}\left\{\text{rect}'(t)\right\}$$

$$\mathcal{TF}\left\{\text{rect}(t)\right\} = \frac{1}{j2\pi f}\left(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}\right) = \text{sinc}(f)$$

Bilan des nouvelles propriétés de la TF

Contraction/dilatation	$y(t) = x(\alpha t)$	$Y(f) = \frac{1}{\lvert\alpha\rvert} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
Dérivation	$y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$Y(f) = (j2\pi f)^n X(f)$
Intégration	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\mathcal{TF}\left\{y(t)\right\} = \frac{1}{(j2\pi f)} X($
	$x(t)$ composante continue nulle	

Fonction d'intercorrélation

- Etant donnés deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à énergie finie, nous avions vu que l'on pouvait évaluer le lien qui existait entre eux grâce à la fonction d'intercorrélation

$$\gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

- Pourrait-on évaluer ce lien également dans le domaine de Fourier ?
- Pour le savoir, calculons la transformée de Fourier de $\gamma_{xy}(\tau)$

TF de la fonction d'intercorrélation

- On calcule

$$\begin{aligned} \Gamma_{xy}(f) &= \mathcal{TF}\left\{\gamma_{xy}(\tau)\right\} \\ &= \mathcal{TF}\left\{x(\tau) * y^*(-\tau)\right\} \\ &= X(f) \times Y^*(f) \qquad \text{cf exercice corrigé} \end{aligned}$$

- Donc on a

$$\mathcal{TF}^{-1}\left\{X(f) \times Y^*(f)\right\} = \gamma_{xy}(\tau)$$

- Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) e^{j2\pi f \tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

TF de la fonction d'intercorrélation

- En prenant $\tau = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$$

- On retrouve le produit scalaire que nous avions défini !

$$\langle X(f) \mid Y(f) \rangle = \langle x(t) \mid y(t) \rangle$$

- Le produit scalaire dans le domaine temporel est également un produit scalaire dans le domaine fréquentiel !
- Les liens qui existent entre deux signaux dans le domaine temporel ont un impact direct sur les liens qui existent entre leurs transformées de Fourier

TF de la fonction d'autocorrélation

- En utilisant le même raisonnement pour l'autocorrélation ($y(t) = x(t)$), on a

$$\begin{aligned}\Gamma_x(f) &= \mathcal{TF}\{\gamma_x(\tau)\} \\ &= \mathcal{TF}\{x(\tau) * x^*(-\tau)\} \\ &= X(f) \times X^*(f) = |X(f)|^2\end{aligned}$$

- Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

TF de la fonction d'autocorrélation

- En prenant $\tau = 0$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x}$$

- Il s'agit du **théorème de Parseval** : on peut estimer l'énergie indifféremment dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel
- $|X(f)|^2$: répartition de l'énergie en fonction de la fréquence, dont l'intégrale sur toutes les fréquences forme l'énergie totale

$$\boxed{\Gamma_x(f) = \mathcal{TF}\{\gamma_x(\tau)\} = |X(f)|^2} \quad : \textbf{densité spectrale d'énergie}$$

- La DSE est une quantité réelle et positive : on peut donc la tracer

Sommaire

Cas des distributions

2.1 Dirac
2.2 Peigne de Dirac

Extension de la transformée de Fourier

- La transformée de Fourier est définie à la base pour les signaux à énergie finie.
- Néanmoins, on peut étendre la notion de transformée de Fourier aux distributions. La preuve de cette existence est en dehors du programme de ce cours.
- Grâce à cette extension, nous verrons dans la suite du cours que l'on pourra définir des transformées de Fourier pour les signaux à puissance finie (périodiques ou non)
- On va s'intéresser ici aux deux distributions vues dans le cours : le Dirac et le peigne de Dirac

Transformée de Fourier d'un Dirac

- Pour calculer la transformée de Fourier d'un Dirac, nous allons juste faire le calcul en supposant que la définition soit valide
- En utilisant la propriété du Dirac

$$x(t) \times \delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ e^{-j2\pi f \times 0} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

Transformée de Fourier d'un Dirac

- On a donc :

$$\boxed{\mathcal{TF}\{\delta(t)\} = 1}$$

- Et de la même façon

$$\boxed{\mathcal{TF}\{1\} = \delta(f)}$$

- En utilisant les propriétés de translation temporelle ou fréquentielle on a :

$$\boxed{\mathcal{TF}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0}}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} = \delta(f-f_0)}$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

- Dans le chapitre sur les séries de Fourier, nous avions vu que le peigne de Dirac de période T

$$Ш_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

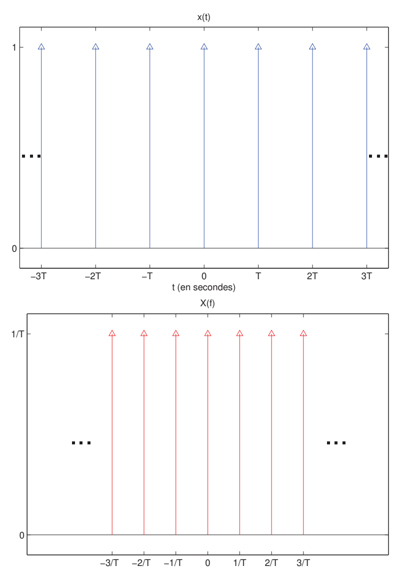
admettait une décomposition en série de Fourier de la forme

$$Ш_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

- En prenant la transformée de Fourier (en supposant qu'elle existe) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{Ш_T(t)\} &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{TF}\left\{e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\right\} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac



$$\mathcal{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\{Ш_T(t)\} = \frac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f)}$$

- La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est... un peigne de Dirac !
- Plus le peigne de Dirac est espacé dans le domaine temporel (T grand), plus il est resserré dans le domaine fréquentiel ($\frac{1}{T}$ petit)

Sommaire

Cas des signaux périodiques

3.1 Lien avec les séries de Fourier
3.2 Autre vision de la transformée de Fourier
3.3 Densité spectrale de puissance

Cas des signaux périodiques

- Les signaux périodiques ne sont pas à énergie finie, donc a priori leur transformée de Fourier n'est pas définie
- En réalité, nous allons montrer qu'elles peuvent exister mais *au sens des distributions*
- Pour cela nous allons utiliser la décomposition en séries de Fourier, qui sont définies sur l'espace $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des signaux à puissance finie, continus et périodiques de période T à valeurs complexes.

Série de Fourier

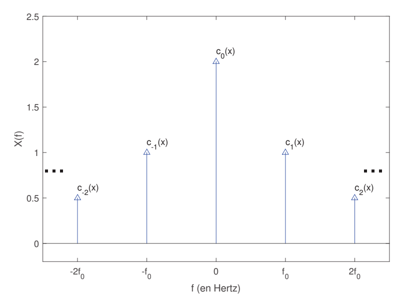
- Soit $x(t)$ un signal de puissance finie, continu et périodique de période T : ce signal admet une décomposition en série de Fourier sous la forme

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

- Grâce à ce que nous avons vu sur les distributions, on peut prendre la transformée de Fourier de ce signal et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{x(t)\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) \mathcal{TF}\left\{e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \end{aligned}$$

Transformée de Fourier d'un signal périodique



On a supposé ici que les $c_k(x)$ étaient réels, sinon on n'aurait pas pu tracer $X(f)$

$$\boxed{X(f) = \mathcal{TF}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}$$

- La transformée de Fourier d'un signal périodique est constituée uniquement de Dirac : il s'agit donc d'une distribution
- On dit que le spectre de ce signal est composé de **raies fréquentielles** sur tous les multiples de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T}$
- Attention, on ne peut pas tracer la quantité $|X(f)|^2$ car on ne peut pas mettre au carré un Dirac

Transformées de Fourier usuelles

- En utilisant les formules d'Euler on peut calculer la TF d'un cosinus :

$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\{\cos(2\pi f_0 t)\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}+\mathcal{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\right]\\ &= \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}\end{aligned}$$

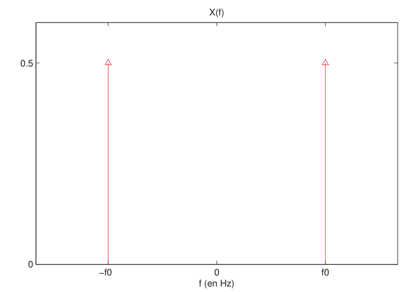
- Ainsi que celle d'un sinus :

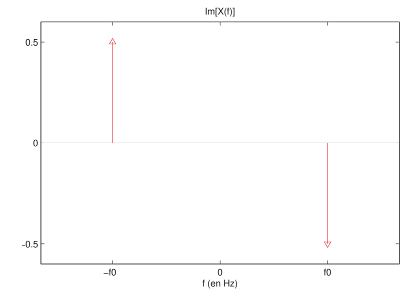
$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\{\sin(2\pi f_0 t)\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}-e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right\}\\ &= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}-\mathcal{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\right]\\ &= \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}\end{aligned}$$

Transformées de Fourier usuelles

$$\mathcal{TF}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$$

$$\mathcal{TF}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$$



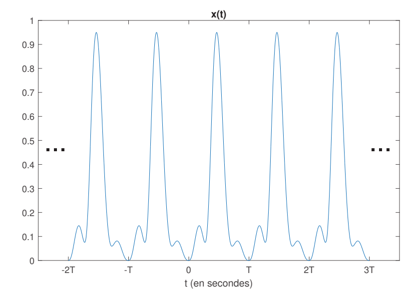


- Dans les deux cas, le spectre comporte uniquement deux raies fréquentielles : une en $+f_0$ et une en $-f_0$

Vision alternative

- On peut étudier les propriétés de la transformée de Fourier en n'utilisant pas explicitement la notion de série de Fourier, mais uniquement ce que nous avions vu sur les distributions
- Ceci tient au fait que l'étude d'un signal périodique peut être résumée à son étude sur une période
- Nous allons voir que la transformée de Fourier du signal est en fait liée à la transformée de Fourier de ce signal sur une période (qui elle, est parfaitement définie)

Vision alternative



Soit donc $x(t)$ un signal périodique de période T.

- Notons $x_T(t)$ la valeur du signal $x(t)$ sur une période $[0, T[$
- Comme le signal se répète à l'infini, il est entièrement caractérisé par son expression sur une période et on a :

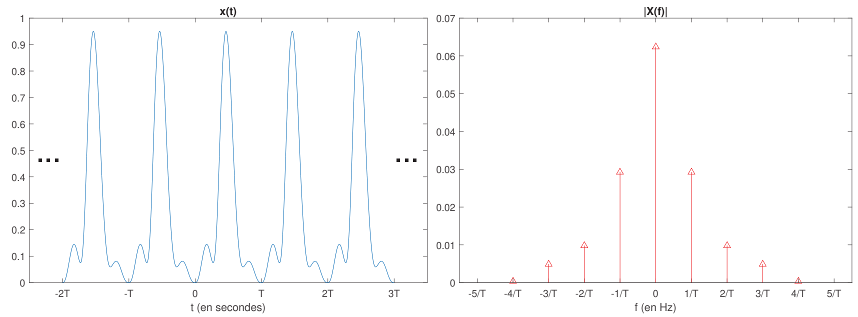
$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t-nT)\\ &= x_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\end{aligned}$$

Vision alternative

En prenant la transformée de Fourier on a :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left\{x(t)\right\} &= \mathcal{TF}\left\{x_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right\} \\
&= \mathcal{TF}\left\{x_T(t)\right\} \times \mathcal{TF}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right\} \\
&= X_T(f) \times \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_T(f)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)
\end{aligned}
$$

Vision alternative



$$\mathcal{TF}\left\{x(t)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

- On retombe sur le fait que le spectre est composé de raies fréquentielles
- On a $c_k(x) = X_T\left(\frac{k}{T}\right)$

Densité spectrale

- Pour les signaux à énergie finie, nous avions défini la notion de densité spectrale d'énergie $\Gamma_x(f)$ et nous avions vu que

$$\Gamma_x(f) = \mathcal{TF}\left\{\gamma_x(\tau)\right\} = |X(f)|^2$$

- Pour un signal périodique, l'énergie n'est pas définie, et comme $X(f)$ est une distribution, on ne peut pas définir la quantité $|X(f)|^2$ donc pas de densité spectrale d'énergie
- En revanche la notion de puissance est bien définie : pourrait-on définir une densité spectrale de puissance ?

Densité spectrale de puissance

- Pour un signal $x(t)$ périodique de période T on a défini la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ comme

$$\gamma_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- En appelant $\Gamma_x(f)$ la transformée de Fourier de $\gamma_x(\tau)$, on a

$$\gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

- Avec $\tau = 0$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f)df = \frac{1}{T}\int_{[T]} |x(t)|^2 dt = P_x$$

- La quantité $\Gamma_x(f)$ est donc assimilable à une **densité spectrale de puissance**

Calcul de la densité spectrale de puissance

- Pour un signal à énergie finie, on pouvait estimer directement la DSE à partir de la transformée de Fourier $X(f)$
- Pour un signal périodique (à puissance finie), ce terme n'est défini qu'au sens des distributions, on ne pourra pas définir la quantité $|X(f)|^2$
- Nous allons voir qu'il existe néanmoins un moyen d'estimer la DSP sans passer par la fonction d'autocorrélation
- Pour cela, nous allons utiliser la décomposition en série de Fourier du signal $x(t)$...

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

- ... et calculer la fonction d'autocorrélation

Fonction d'autocorrélation

$$\begin{aligned}
\gamma_x(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{[T]} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}t}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^*(x) e^{-j\frac{2\pi l}{T}(t-\tau)}\right) dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_k(x) c_l^*(x) e^{j\frac{2\pi l}{T}\tau} \underbrace{\left(\int_{[T]} e^{j\frac{2\pi(k-l)}{T}t} dt\right)}_{0 \text{ si } k\neq l,\ T \text{ sinon}} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) c_k^*(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}\tau}\, T \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(x)|^2 e^{j\frac{2\pi k}{T}\tau}
\end{aligned}$$

Fonction d'autocorrélation

$$\boxed{\gamma_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(x)|^2 e^{j\frac{2\pi k}{T}\tau}}$$

- Lien direct entre la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ et les coefficients de Fourier $c_k(x)$
- On vérifie bien que la fonction d'autocorrélation d'un signal périodique de période T est également périodique de période T
- Elle admet donc une décomposition en série de Fourier et par identification on a : $c_k(\gamma_x) = |c_k(x)|^2$

Densité spectrale de puissance

- En prenant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation on a

$$\boxed{\Gamma_x(f) = \mathcal{TF}\{\gamma_x(\tau)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(x)|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}$$

- Or on a bien

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(x)|^2 = P_x}$$

$\boxed{\Gamma_x(f)}$: **densité spectrale de puissance**

- La quantité $\Gamma_x(f)$ donne la répartition de la puissance en fonction de la fréquence, dont l'intégrale sur toutes les fréquences forme la puissance moyenne totale

DSP usuelles

- Pour les fonctions cosinus et sinus on a

$$\mathcal{TF}\left\{\cos\left(2\pi f_0 t\right)\right\} = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$$

$$\mathcal{TF}\left\{\sin\left(2\pi f_0 t\right)\right\} = \frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$$

- Et les coefficients de Fourier sont

$$c_{-1}(\cos) = \frac{1}{2} \qquad c_1(\cos) = \frac{1}{2}$$

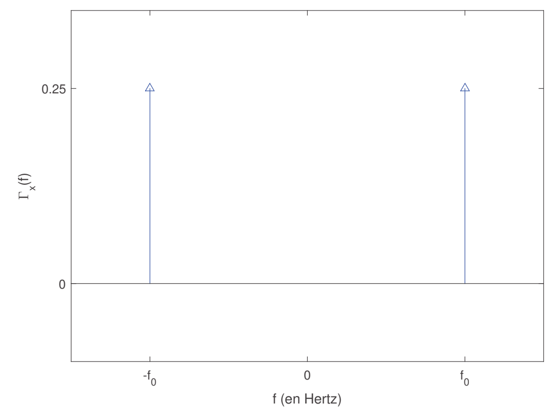
$$c_{-1}(\sin) = -\frac{1}{2j} \qquad c_1(\sin) = \frac{1}{2j}$$

- La densité spectrale de puissance de ces deux signaux est donc la même

$$\boxed{\Gamma_{\cos}(f) = \Gamma_{\sin}(f) = \frac{1}{4}\delta(f-f_0) + \frac{1}{4}\delta(f+f_0)}$$

DSP usuelles

$$\boxed{\Gamma_{\cos}(f) = \Gamma_{\sin}(f) = \frac{1}{4}\delta(f-f_0) + \frac{1}{4}\delta(f+f_0)}$$



Sommaire

Cas des signaux à puissance finie

4.1 Fonction échelon
4.2 Fonction signe
4.3 Densité spectrale de puissance

Cas des signaux à puissance finie

- Les signaux à puissance finie ne sont pas à énergie finie, donc a priori leur transformée de Fourier n'est pas définie
- En réalité, nous allons montrer qu'elles peuvent exister dans certains cas mais *au sens des distributions*
- Contrairement aux signaux périodiques, nous n'allons pas ici établir de théorie générale. Nous allons nous focaliser sur les signaux usuels : fonction échelon $u(t)$ et fonction signe $\mathrm{sgn}(t)$

Fonction échelon

- Considérons la fonction échelon $\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- On admettra que

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{\mathrm{u}(t)\right\} = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)}$$

Fonction signe

- Considérons la fonction signe $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$
- On admettra

$$\boxed{\mathcal{TF}\left\{\mathrm{sgn}(t)\right\} = \frac{1}{j\pi f}}$$

Densité spectrale de puissance

- Tout comme pour les signaux à énergie finie et les signaux périodiques, nous allons définir une notion de densité spectrale, qui sera ici une densité spectrale de puissance
- Nous allons encore une fois nous baser sur la définition de la fonction d'autocorrélation pour définir cette densité spectrale de puissance

Densité spectrale de puissance

- Pour un signal $x(t)$ à puissance finie on a défini la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ comme

$$\gamma_x(\tau) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- En appelant $\Gamma_x(f)$ la transformée de Fourier de $\gamma_x(\tau)$, on a

$$\gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

- Avec $\tau = 0$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} |x(t)|^2 dt = P_x$$

- La quantité $\Gamma_x(f)$ est donc assimilable à une **densité spectrale de puissance**

Densité spectrale de puissance

- On définit donc la densité spectrale de puissance

$$\boxed{\Gamma_x(f) = \mathcal{TF}\left\{\gamma_x(\tau)\right\}}$$

- Et on a bien

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df = P_x}$$

$\boxed{\Gamma_x(f) : \textbf{densité spectrale de puissance}}$

- La quantité $\Gamma_x(f)$ donne la répartition de la puissance en fonction de la fréquence, dont l'intégrale sur toutes les fréquences forme la puissance moyenne totale