Théorie du signal

Représentation vectorielle des signaux

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année
2019-2020

Plan du cours

Contexte

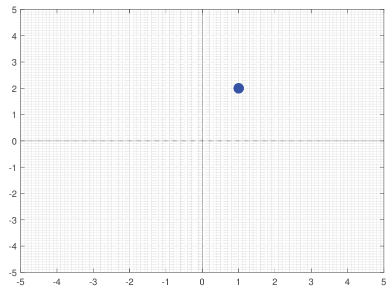
- Jusqu'à présent, nous avons focalisé notre attention sur l'étude d'un signal unique.
- Comment pourrait-on étendre ceci à l'étude de plusieurs signaux ?
  - Comparer des signaux
  - Définir des distances entre signaux pour savoir si ils sont *proches* ou non
- La distance la plus connue est la distance euclidienne qui est définie dans le plan 2D. Pourrait-on étendre cette notion à des signaux ?

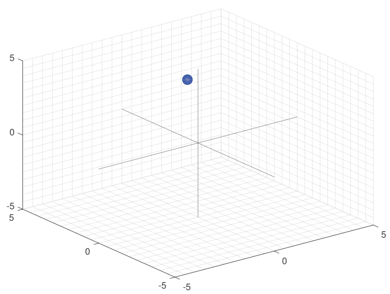
Sommaire

Rappels sur les espaces euclidiens

Espace euclidien

- Un espace euclidien est un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie et muni d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$
- Le produit scalaire permet de mesurer les distances et les angles
- Deux espaces courants : $\mathbb{R}^2$ (plan) et $\mathbb{R}^3$ (espace)





Définition d'un espace vectoriel

Un **espace vectoriel** E possède deux opérateurs $+$ et $\cdot$ vérifiant

- Opérateur addition $+$: $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \text{ commutativité} \qquad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \text{ associativité}$$
$$0_E+\vec{v}=\vec{v} \text{ élément neutre} \qquad \vec{u}+(-\vec{u})=0_E \text{ vecteur opposé}$$

- Opérateur multiplication $\cdot$: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v} \text{ distributivité} \qquad (\lambda\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u}) \text{ associativité}$$
$$(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u} \text{ distributivité} \qquad 1\cdot\vec{u}=\vec{u} \text{ élément neutre}$$

Définition d'un produit scalaire

Un **produit scalaire** $\langle . \mid . \rangle$ défini sur un espace vectoriel E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

- Bilinéaire

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} \mid \lambda\cdot\vec{v}+\mu\cdot\vec{w} \rangle &= \lambda\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle+\mu\langle \vec{u} \mid \vec{w}\rangle \\ \langle \lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v} \mid \vec{w} \rangle &= \lambda\langle \vec{u} \mid \vec{w}\rangle+\mu\langle \vec{v} \mid \vec{w}\rangle \end{aligned}$$

- Symétrique

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle = \langle \vec{v} \mid \vec{u}\rangle$$

- Positive

$$\langle \vec{u} \mid \vec{u}\rangle \geq 0$$

- Définie

$$\langle \vec{u} \mid \vec{u}\rangle = 0 \Rightarrow \vec{u}=0_E$$

Norme euclidienne

- Sur un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$ on peut définir une **norme** $\|.\|$ telle que

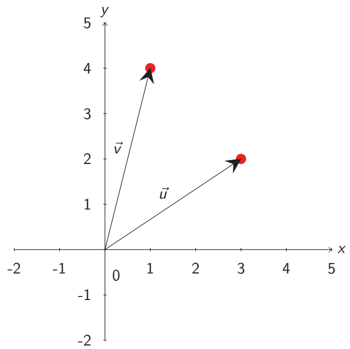
$$\forall \vec{u} \in E, \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u} \mid \vec{u}\rangle}$$

- Cette norme permet d'accéder à une mesure du vecteur $\vec{u}$
- On peut également définir une notion de **distance** $d(.,.)$ entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E en posant

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \qquad d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}-\vec{v}\|$$

- Cette distance est toujours positive, et est nulle si et seulement si $\vec{u}=\vec{v}$

Exemple sur $\mathbb{R}^2$



- Si on considère l'espace $\mathbb{R}^2$, et deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$, on peut définir :
- Le produit scalaire

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

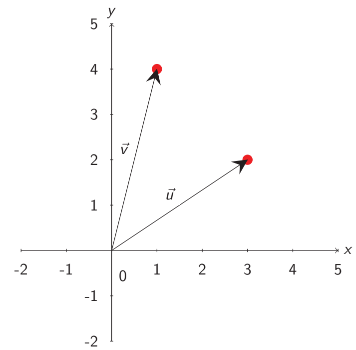
- La norme euclidienne

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

- La distance euclidienne

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

Exemple sur $\mathbb{R}^2$



Exemple : $\vec{u} = (3, 2)$ et $v = (1, 4)$

- Longueur du vecteur $\vec{u}$, distance du point u à l'origine

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

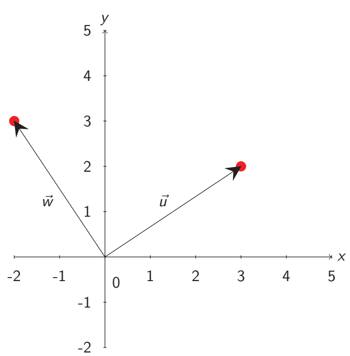
- Distance entre les points $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$$

- Produit scalaire entre $\vec{u}$ sur $\vec{v}$

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = 3 \times 1 + 2 \times 4 = 11$$

Orthogonalité



- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = 0$$

- Dans $\mathbb{R}^2$, cette orthogonalité signifie qu'il y a un angle droit entre les vecteurs. Exemple $\vec{u} = (3, 2)$ et $\vec{w} = (-2, 3)$

$$\langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle = 3 \times (-2) + 2 \times 3 = 0$$

Base orthonormale

Un ensemble de N vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N)$ de E est une base orthonormale de E si et seulement si

- Notion de base

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N, \qquad \vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \vec{e}_i$$

- Orthogonalité

$$\forall i \neq j \quad \langle \vec{e}_i \mid \vec{e}_j \rangle = 0$$

- Normalisation

$$\forall i \quad \|\vec{e}_i\| = 1$$

Exemple sur $\mathbb{R}^2$

- Sur $\mathbb{R}^2$, une base orthonormale naturelle est
$$\vec{e}_1 = (1, 0) \qquad \vec{e}_2 = (1, 0)$$
- On voit aisément que pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ on peut écrire
$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$$
- On a également
$$\langle \vec{e}_1 \mid \vec{e}_2 \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$
- Ainsi que
$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

Quelques propriétés

- Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N)$ est une base orthonormale de E, on peut écrire tout vecteur $\vec{u}$ de E sous la forme
$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \langle \vec{u} \mid \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$
- On a également
$$\|\vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle \vec{u} \mid \vec{e}_i \rangle|^2$$

Démonstration en exercice

Quelques propriétés

- **Inégalité triangulaire.** Si $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs de E on a :
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$
- **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Si $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs de E on a :
$$|\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \; \|\vec{v}\|^2$$
L'égalité entre les deux termes est atteinte si et seulement si
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Démonstration en exercice

Bilan

- Afin d'appliquer ces principes d'algèbre et de géométrie à nos signaux il va falloir
  - Trouver le lien entre les vecteurs et les signaux, et donc définir des espaces de signaux qui soient l'équivalent des espaces vectoriels que nous avions définis pour les vecteurs
  - Définir des produits scalaires sur ces espaces de signaux, afin de pouvoir définir des distances, des normes, etc...
- Pour cela, il va falloir étendre la notion d'espace euclidien à celle d'espace de Hilbert

Espaces de Hilbert

- Les espaces de Hilbert sont des espaces vectoriels de dimension infinie munis d'un produit scalaire
- Ils sont une extension de la notion d'espace euclidien
- Leur étude dépasse largement le cadre du cours, nous partirons du principe que les propriétés algébriques des espaces euclidiens (de dimension finie) peuvent s'étendre aux espaces de Hibert (de dimension infinie)
- Nous allons en considérer deux dans le cadre du cours
  - Espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions de la variable réelle à carré sommable à valeurs complexes
  - Espace $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions de la variable réelle, continues et périodiques de période $T > 0$ et à valeurs complexes.

Espaces considérés

- Espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions de la variable réelle à carré sommable à valeurs complexes
  - Appartiennent à cet espace tous les signaux à énergie finie et/ou à support temporel borné : fonction porte, rectangulaire, triangulaire...
- Espace $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions de la variable réelle, continues et périodiques de période $T > 0$ et à valeurs complexes.
  - Appartiennent à cet espace tous les signaux périodiques à puissance finie : sinusoïde réelle ou complexe...

Sommaire

Cas des signaux à énergie finie

Cas des signaux à énergie finie

- Dans cette première partie, nous allons considérer des signaux $x(t)$ à valeurs a priori complexes, tels que

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

- L'ensemble de ces signaux est noté $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: il s'agit de l'ensemble des signaux à énergie finie
- On pourrait démontrer que cet ensemble est un espace vectoriel (en utilisant notamment la notion de signaux égaux presque partout, mais c'est vraiment hors programme !), et même qu'il s'agit d'un espace de Hilbert (encore une fois moyennant cette subtilité des signaux égaux presque partout)
- L'important pour nous, c'est que nous allons pouvoir définir un produit scalaire sur cet espace, et donc des normes, des distances, etc... !

Produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$

- Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie appartenant à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on peut définir le produit scalaire

$$\boxed{\langle x \mid y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt}$$

où $y^*(t)$ correspond au conjugué du signal $y(t)$.
- Remarque : comme nous supposons maintenant que le produit scalaire est à valeurs complexes (on dit qu'il est hermitien), deux de ses propriétés sont modifiées
  - La propriété de symétrie devient une propriété de symétrie hermitienne

$$\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle^*$$

  - La propriété de linéarité à droite devient une propriété de semi-linéarité à droite

$$\langle x \mid \lambda y + \mu z \rangle = \lambda^* \langle x \mid y \rangle + \mu^* \langle x \mid z \rangle$$

Norme et distance sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$

- On peut également définir la norme suivante

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}}$$

- On peut remarquer qu'avec cette définition on a

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

- Dans l'espace euclidien, la norme d'un vecteur était liée à sa longueur. De façon analogue pour un signal à énergie finie, la norme est liée à l'énergie.
- On peut aussi définir la distance

$$\boxed{d(x,y) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt}}$$

Quelques propriétés

Un grand nombre de propriétés vues sur les espaces euclidiens restent valables sur l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$

- Inégalité triangulaire

$$\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\boxed{|\langle x \mid y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \ \|y\|^2}$$

- Orthogonalité

$$\boxed{\langle x \mid y \rangle = 0}$$

- Décomposition sur une base orthonormale $\{\Phi_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (qui contient désormais une infinité dénombrable de fonctions)

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle x \mid \Phi_k \rangle \Phi_k(t)}$$

$$\boxed{E_x = \|x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle x \mid \Phi_k \rangle|^2}$$

Comparer un signal avec lui-même

- La notion de produit scalaire nous permet de comparer deux signaux et de définir la notion d'orthogonalité pour les signaux
- Lorsque l'on fait le produit scalaire du signal avec lui même, on obtient son énergie
- Pourrait-on, afin de mieux comprendre un signal $x(t)$, le comparer avec lui même, mais en le décalant dans le temps ?

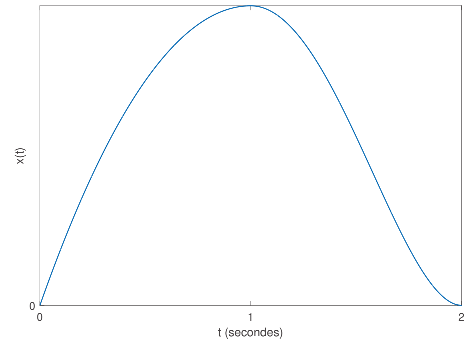
Fonction d'autocorrélation

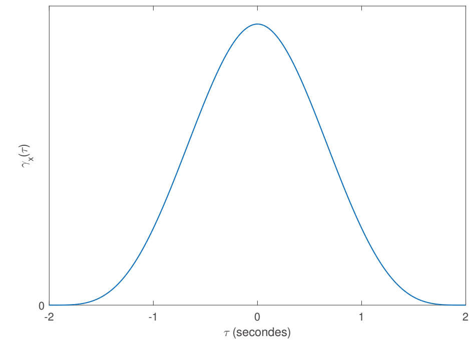
Soit $x(t)$ un signal à énergie finie. On appelle **fonction d'autocorrélation** de x et on note $\gamma_x(\tau)$ la fonction

$$\boxed{\gamma_x(\tau) = \langle x(t) \mid x(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt}$$

- On compare le signal $x(t)$ au signal $x(t-\tau)$ translaté de τ
- L'autocorrélation permet de détecter les régularités et de mettre en évidence les répétitions et les phénomènes présents dans le signal
- Elle est très utilisée notamment en optique, lasers, radar et traitement du son

Illustration

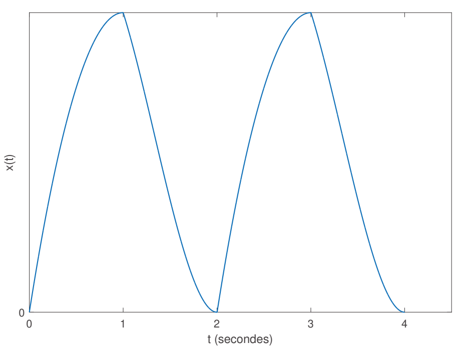


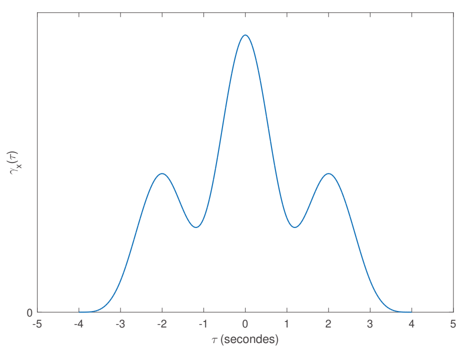


- Support temporel $[0, 2]$
- Signal ne présentant pas de répétitions

- L'autocorrélation a un support temporel $[-2, 2]$
- Elle ne présente pas de signes distinctifs

Illustration

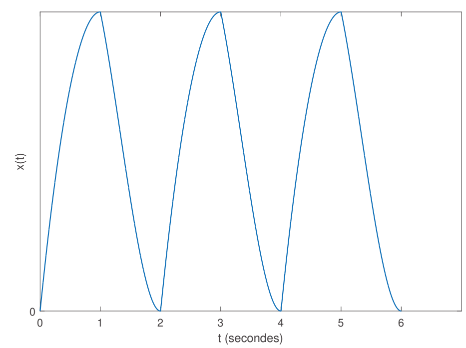


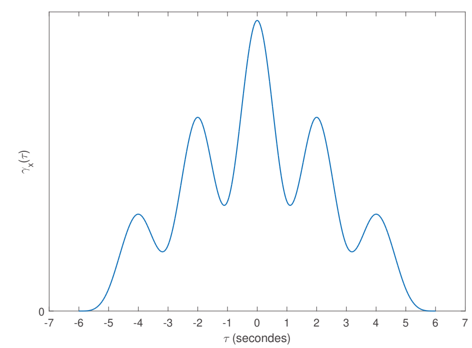


- Support temporel $[0, 4]$
- Signal présentant une répétition : le même motif se répéte deux fois

- L'autocorrélation a un support temporel $[-4, 4]$
- Deux pics en ± 2 : le signal original se répéte au bout de 2 secondes

Illustration





- Support temporel $[0, 6]$
- Le signal se répéte à $t = 2$ et $t = 4$

- L'autocorrélation a un support temporel $[-6, 6]$
- On voit des pics sur la fonction d'autocorrélation en $\tau \pm 2$ et $\tau \pm 4$

Quelques propriétés

- La fonction d'autocorrélation possède une symétrie hermitienne

$$\boxed{\gamma_x(-\tau) = \gamma_x^*(\tau)}$$

En particulier si le signal $x(t)$ est réel, la fonction d'autocorrélation est paire

- La valeur en $\tau = 0$ de l'autocorrélation est toujours réelle et correspond à l'énergie totale du signal

$$\boxed{\gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x}$$

- La fonction d'autocorrélation est maximale en $\tau = 0$

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \boxed{|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0)}$$

Démonstration en exercice

Lien avec le produit de convolution

- Il existe un lien entre le produit de convolution et la fonction d'autocorrélation

$$\boxed{\gamma_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)}$$

- En effet :

$$\begin{aligned} x(\tau) * x^*(-\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(-(\tau - t))dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \\ &= \gamma_x(\tau) \end{aligned}$$

Comparer deux signaux

- De la même façon que l'on a pu comparer un signal avec lui-même, on va pouvoir comparer deux signaux $x(t)$ et $y(t)$
- Pour cela on va faire le produit scalaire entre $x(t)$ et $y(t-\tau)$
- Il s'agit dans ce cas de la fonction d'intecorrélation, également appelée corrélation croisée.

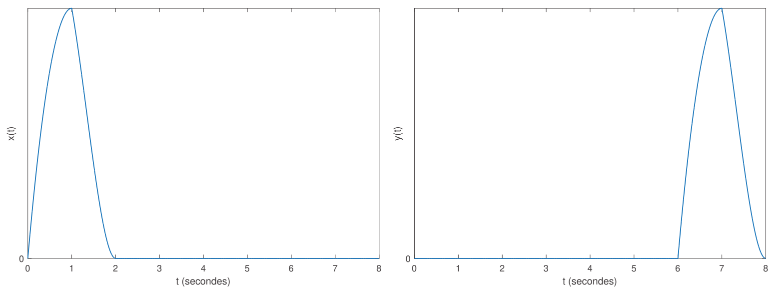
Fonction d'intercorrélation

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie. On appelle **fonction d'intercorrélation** entre x et y et on note $\gamma_{xy}(\tau)$ la fonction

$$\boxed{\gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t) \mid y(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt}$$

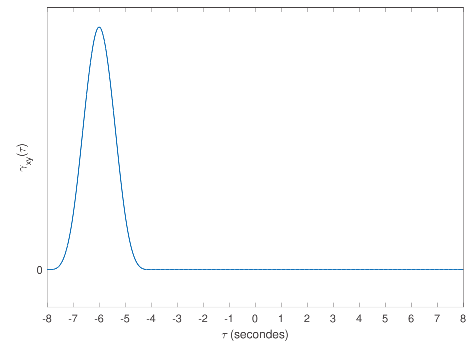
- On compare le signal $x(t)$ au signal $y(t-\tau)$ translaté de τ
- L'intercorrélation permet de mesurer les retards entre signaux et peut être un indicateur de déformation d'un signal
- Elle est très utilisée notamment en radar ou pour détecter des signaux particuliers

Illustration



- $y(t)$ est une version décalée de $x(t)$
- $y(t)$ est en retard de $t_0 = 6$

Illustration



- La fonction d'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$ admet un pic en $\tau = -6$
- Elle permet donc de détecter un retard : $y(t)$ est en retard (d'où la valeur négative) de 6 secondes sur $x(t)$

Quelques propriétés

- Il existe un lien entre le produit de convolution et la fonction d'intercorrélation

$$\boxed{\gamma_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)}$$

- Le terme obtenu en $\tau = 0$ est appelée énergie croisée

$$E_{xy} = \gamma_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$$

Sommaire

Cas des signaux périodiques

Cas des signaux périodiques

- Dans cette deuxième partie, nous allons considérer des signaux $x(t)$ à valeurs a priori complexes, continus et périodiques de période $T > 0$ tels que

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{[T]} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

- L'ensemble de ces signaux est noté $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: il s'agit de l'ensemble des signaux à puissance finie, continus et périodiques de période T
- Encore une fois, en utilisant la notion de signaux égaux presque partout on pourrait voir cet espace comme un espace de Hilbert, et donc définir un produit scalaire

Produit scalaire sur $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

- Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux périodiques de période T appartenant à $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on peut définir le produit scalaire

$$\boxed{\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)y^*(t)dt}$$

où $y^*(t)$ correspond au conjugué du signal $y(t)$.
- Remarque : comme nous supposons maintenant que le produit scalaire est à valeurs complexes (on dit qu'il est hermitien), deux de ses propriétés sont modifiées
  - La propriété de symétrie devient une propriété de symétrie hermitienne

$$\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle^*$$

  - La propriété de liéarité à droite devient une propriété de semi-linéarité à droite

$$\langle x \mid \lambda y + \mu z \rangle = \lambda^* \langle x \mid y \rangle + \mu^* \langle x \mid z \rangle$$

Norme et distance sur $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

- On peut également définir la norme suivante

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{[T]} |x(t)|^2 dt}}$$

- On peut remarquer qu'avec cette définition on a

$$\|x\|^2 = \frac{1}{T}\int_{[T]} |x(t)|^2 dt = P_x$$

- Dans l'espace euclidien, la norme d'un vecteur était liée à sa longueur. De façon analogue pour un signal à énergie finie, la norme est liée à l'énergie. Et pour un signal périodique à puissance finie, la norme est liée à la puissance.

Energie vs. Puissance

- Nous avions défini un certain nombre de notions sur les signaux à énergie finie (produit scalaire, décomposition, auto- et intecorrélation). Toutes ces notions ont été définies **au sens de l'énergie**
- Pour les signaux périodiques de période T, l'énergie n'est pas définie (elle est infinie). Il a donc fallu changer le produit scalaire et de la même façon toutes les autres notions, pour qu'elles deviennent définies **au sens de la puissance**.

Quelques propriétés

- Inégalité triangulaire

$$\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\boxed{|\langle x \mid y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \; \|y\|^2}$$

- Orthogonalité

$$\boxed{\langle x \mid y\rangle = 0}$$

- Décomposition sur une base orthonormale $\{\Phi_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ (qui contient désormais une infinité dénombrable de fonctions)

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle x \mid \Phi_k\rangle \Phi_k(t)}$$

$$\boxed{P_x = \|x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle x \mid \Phi_k\rangle|^2}$$

Fonction d'autocorrélation

Soit $x(t)$ un signal périodique de période $T > 0$. On appelle **fonction d'autocorrélation** de x et on note $\gamma_x(\tau)$ la fonction

$$\boxed{\gamma_x(\tau) = \langle x(t) \mid x(t-\tau)\rangle = \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)x^*(t-\tau)dt}$$

- On compare le signal $x(t)$ au signal $x(t-\tau)$ translaté de τ
- Les propriétés vues précédemment restent vraies

$$\boxed{\gamma_x(-\tau) = \gamma_x^*(\tau)}$$

$$\boxed{\gamma_x(0) = \frac{1}{T}\int_{[T]} |x(t)|^2 dt = P_x}$$

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0)}$$

Fonction d'autocorrélation

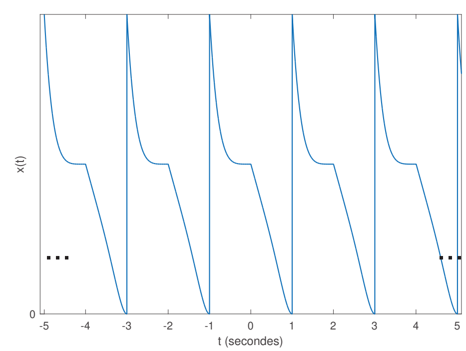
- Une propriété importante est que la fonction d'autocorrélation, définie pour les signaux périodiques de période $T > 0$, est également périodique de période T

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \gamma_x(\tau + T) = \gamma_x(\tau)$$

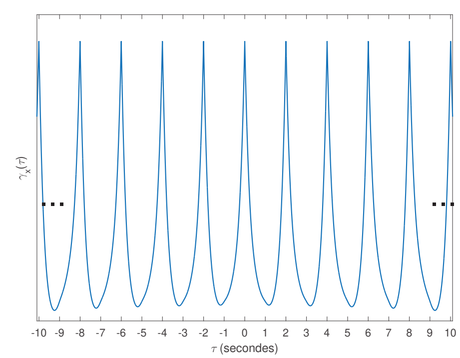
- Démonstration très simple

$$\begin{aligned}
\gamma_x(\tau+T) &= \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)x^*(t-(\tau+T))dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)x^*(t-\tau-T)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)x^*(t-\tau)dt \\
&= \gamma_x(\tau)
\end{aligned}$$

Illustration



- Signal périodique de période $T = 2$



- Fonction d'autocorrélation également périodique de période $T = 2$

Fonction d'intercorrélation

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux périodiques de période $T > 0$. On appelle **fonction d'intercorrélation** entre x et y et on note $\gamma_{xy}(\tau)$ la fonction

$$\boxed{\gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t) \mid y(t-\tau) \rangle = \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)y^*(t-\tau)dt}$$

- On compare le signal $x(t)$ au signal $y(t-\tau)$ translaté de τ
- L'intercorrélation permet de mesurer des distances grâce à des ondes (qui sont des signaux périodiques)

Fonction d'intercorrélation

- Une propriété importante est que la fonction d'intercorrélation, définie pour les signaux périodiques de période $T > 0$, est également périodique de période T
$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \gamma_x(\tau + T) = \gamma_x(\tau)$$
- Démonstration très simple

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(\tau + T) &= \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)y^*(t-(\tau+T))dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)y^*(t-\tau)dt \\ &= \gamma_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

Sommaire

Cas des signaux à puissance finie

Cas des signaux à puissance finie

- Dans cette dernière partie, nous allons considérer des signaux $x(t)$ à puissance finie, mais pas nécessairement périodiques
- Cette fois-ci on ne pourra pas définir de produit scalaire ni de norme, mais on définira tout de même la fonction de fonction d'autocorrélation/intercorrélation
- Tout comme ce qui avait été fait pour les signaux périodiques, ces notions seront définies *au sens de la puissance*

Fonction d'autocorrélation

Soit $x(t)$ un signal à puissance finie. On appelle **fonction d'autocorrélation** de x et on note $\gamma_x(\tau)$ la fonction

$$\boxed{\gamma_x(\tau) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} x(t)x^*(t-\tau)dt}$$

- On compare le signal $x(t)$ au signal $x(t-\tau)$ translaté de τ
- Les propriétés vues précédemment restent vraies

$$\boxed{\gamma_x(-\tau) = \gamma_x^*(\tau)}$$

$$\boxed{\gamma_x(0) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} |x(t)|^2 dt = P_x}$$

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{|\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0)}$$

Fonction d'intercorrélation

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à puissance finie. On appelle **fonction d'intercorrélation** entre x et y et on note $\gamma_{xy}(\tau)$ la fonction

$$\boxed{\gamma_{xy}(\tau) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} x(t)y^*(t-\tau)dt}$$

- On compare le signal $x(t)$ au signal $y(t-\tau)$ translaté de τ

Sommaire

Bilan

Signaux à énergie finie

$$x(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ tel que } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

- Produit scalaire

$$\boxed{\langle x \mid y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt}$$

- Norme

$$\boxed{\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x}$$

- Fonction d'autocorrélation

$$\boxed{\gamma_x(\tau) = \langle x(t) \mid x(t-\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt}$$

Signaux à puissance finie périodiques

$$x(t) \in \mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ tel que } P_x = \frac{1}{T}\int_{[T]} |x(t)|^2 dt < +\infty \text{ et } \forall t,\ x(t+T) = x(t)$$

- Produit scalaire

$$\boxed{\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t) y^*(t) dt}$$

- Norme

$$\boxed{\|x\|^2 = \frac{1}{T}\int_{[T]} |x(t)|^2 dt = P_x}$$

- Fonction d'autocorrélation

$$\boxed{\gamma_x(\tau) = \langle x(t) \mid x(t-\tau) \rangle = \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t) x^*(t-\tau) dt}$$

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \gamma_x(\tau + T) = \gamma_x(\tau)$$

Signaux à puissance finie non périodiques

$$x(t) \text{ tel que } P_x = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

- Fonction d'autocorrélation

$$\boxed{\gamma_x(\tau) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} x(t) x^*(t-\tau) dt}$$