Théorie du signal

Modèles, propriétés et transformations des signaux

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année
2019-2020

Plan du cours

Sommaire

Propriétés des signaux

Signaux et fonctions

- Dans le cadre de ce cours on va considèrer des signaux $x(t)$ analogiques qui seront réels ou complexes
- Ces signaux peuvent être vus comme des fonctions de la variable réelle $t \in \mathbb{R}$
- Comme toute fonction, on va pouvoir définir des notions de continuité, de dérivabilité, etc...
- Parfois, les modèles que nous allons utiliser n'auront pas nécessairement des propriétés très simples (discontinuités, non dérivabilité, ...)
- ... mais heureuseuement des outils existent !

Support temporel - Périodicité

Signal $x(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Support temporel : intervalle I des temps $t \in \mathbb{R}$ pour lequel le signal $x(t)$ est défini et/ou non nul.

- Le support temporel peut être **borné** ou **non borné**.

Périodicité

$$\boxed{\exists T > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t+T) = x(t)}$$

- T : période
- Si le signal est T-périodique, il est kT-périodique, avec $k \in \mathbb{Z}^*$
- T_0 : période fondamentale : plus petite période strictement positive

Parité - Imparité - Causalité

Signal $x(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Parité

$$\boxed{x(-t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

Imparité

$$\boxed{x(-t) = -x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

Causalité

$$\boxed{x(t) = 0 \quad \forall t < 0}$$

- Causalité stricte : même définition sauf que $x(0) = 0$

Continuité

Soit $x(t)$ un signal défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

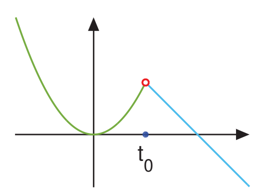
Continuité

On dit que $x(t)$ est **continue en** $t_0 \in I$ si et seulement si :

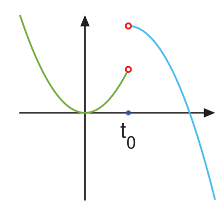
- $\lim_{t \to t_0^-} x(t)$ existe
- $\lim_{t \to t_0^+} x(t)$ existe
- $\lim_{t \to t_0^-} x(t) = \lim_{t \to t_0^+} x(t) = x(t_0)$

Discontinuités

- Une discontinuité finie se manifeste par le non-respect d'une ou plusieurs de ces propriétés



- Limite à gauche existe $x(t_0^-)$
- Limite à droite existe $x(t_0^+)$
- Limites à gauche et à droite égales $x(t_0^-) = x(t_0^+)$
- Mais non égales à $x(t_0)$



- Limite à gauche existe $x(t_0^-)$
- Limite à droite existe $x(t_0^+)$
- Mais limites à gauche et à droite non égales $x(t_0^-) \neq x(t_0^+)$ et non égales à $x(t_0)$

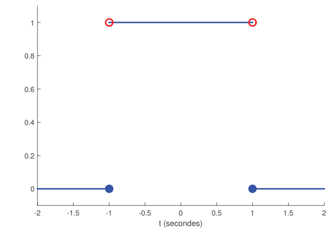
Discontinuités

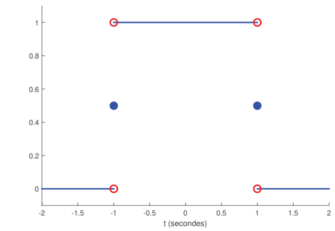
- Dans le cadre de ce cours, nous allons étudier beaucoup de signaux présentant de telles discontinuités.
- Ces discontinuités sont particulièrement courantes dans les modèles théoriques (exemple du signal porte déjà étudié en ITS).
- Parfois même, le signal n'aura pas de valeur prédéterminée en certains points.
- Dans ces cas là, il est courant, si les limites à gauche et à droite existent, de définir

$$x(t_0) = \frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

Signaux égaux presque partout

- Considérons deux signaux porte dont la définition diffère aux points de discontinuités $t = \pm 1$



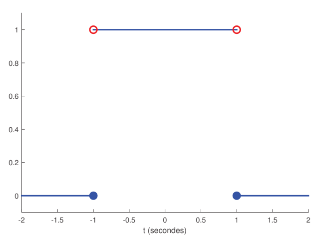


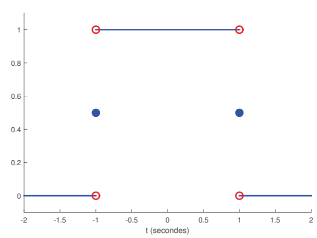
$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ces deux signaux ne diffèrent qu'en un nombre fini de points : on dit qu'ils sont égaux **presque partout**

Signaux égaux presque partout





- En particulier, si deux signaux sont égaux presque partout, leur intégrale est la même
- Ceci est également valable pour l'énergie : on aurait pu donner n'importe quelle définition (finie) à ce qui se passait aux temps de discontinuités $t \pm 1$, cela n'aurait pas changé la valeur de l'énergie

Dérivabilité

Soit $x(t)$ un signal défini sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Dérivabilité

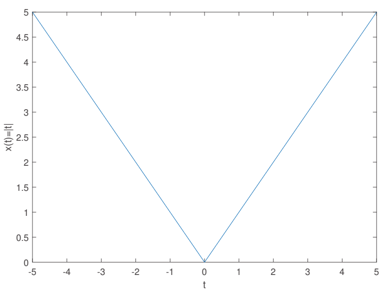
On dit que $x(t)$ est **dérivable en** $t_0 \in I$ si et seulement si :

- $\lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)}{\epsilon}$ existe
- $\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)}{\epsilon}$ existe
- $\lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{x(t_0 + \epsilon) - x(t_0)}{\epsilon} = x'(t_0)$

- Attention, la continuité n'entraîne pas la dérivabilité !

Exemple

Signal $x(t) = |t|$



- Continu en 0

$$\lim_{t \to 0^-} x(t) = \lim_{t \to 0^+} x(t) = x(0) = 0$$

- Non dérivable en 0
  - Limite à gauche

$$\lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{x(\epsilon) - x(0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^-} \frac{|\epsilon|}{\epsilon} = -1$$

  - Limite à droite

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{x(\epsilon) - x(0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{|\epsilon|}{\epsilon} = 1$$

Energie et puissance

Soit $x(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Energie totale

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}$$

Puissance moyenne totale

$$\boxed{P_x = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} |x(t)|^2 dt}$$

- Un signal **à énergie finie** est un signal tel que $E_x < +\infty$
- Sinon, on dit que le signal est **à puissance finie** $P_x < +\infty$

Cas des signaux à énergie finie

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Signaux pour lesquelle la quantité E_x est définie et correspond à un nombre fini
- Cela revient à démontrer que le signal $|x(t)|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, où, de façon équivalente que le signal $x(t)$ est à carré sommable (ou intégrable)
- On dit dans ces cas là que $x(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: **espace des fonctions de la variable réelle à carré sommable à valeurs complexes**

Cas des signaux périodiques

- Un signal périodique non nul est nécessairement à puissance finie.
- On peut estimer la puissance uniquement sur une période

$$P_x = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} |x(t)|^2 dt$$

- En écrivant $A = nT + t_0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2A} \int_{-A}^{+A} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{2A} \int_{-(nT+t_0)}^{+(nT+t_0)} |x(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2A} \left[\int_{-(nT+t_0)}^{-nT} |x(t)|^2 dt + \int_{-nT}^{+nT} |x(t)|^2 dt + \int_{+nT}^{+(nT+t_0)} |x(t)|^2 dt \right] \\
&= \frac{1}{2A} \left[\int_{-(nT+t_0)}^{-nT} |x(t)|^2 dt + \int_{+nT}^{+(nT+t_0)} |x(t)|^2 dt \right] \\
&\quad + \frac{2n}{2(nT+t_0)} \int_{[T]} |x(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

Cas des signaux périodiques

$$\frac{1}{2(nT+t_0)}\left[\int_{-(nT+t_0)}^{-nT}|x(t)|^2dt+\int_{+nT}^{+(nT+t_0)}|x(t)|^2dt\right]+\frac{2n}{2(nT+t_0)}\int_{[T]}|x(t)|^2dt$$

- Quand $n \to +\infty$, les deux premiers termes tendent vers 0
- Le troisième tend vers $\frac{1}{T}\int_{[T]}|x(t)|^2dt$
- Il suffit donc d'évaluer la puissance moyenne sur une période, et pour un signal périodique on a

$$\boxed{P_x = \frac{1}{T}\int_{[T]}|x(t)|^2dt}$$

Moyennes et variances

- En plus de la notion d'énergie totale et/ou de puissance moyenne totale, on peut définir pour un signal réel la notion de moyenne et de variance
- Ces quantités sont estimées sur un intervalle $[a, b]$ sur lequel on a enregistré le signal.
- Dans le cas des signaux à support temporel borné, il est courant de les estimer sur l'ensemble du support temporel
- Dans le cas des signaux périodiques (qui ont un support temporel nécessairement non borné), on les estime sur une période de durée T
- Pour les autres signaux, on estime cette quantité sur $\mathbb{R}$

Moyenne et variance : support temporel borné

Soit $x(t)$ un signal réel continu à support temporel borné $[a, b]$

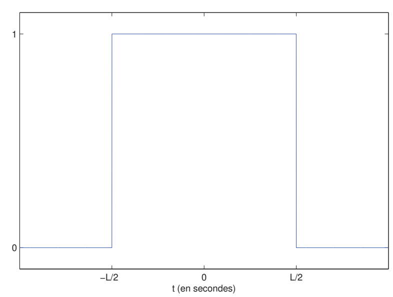
- On appelle valeur moyenne de $x(t)$ sur $[a, b]$ et on note $\bar{x}$ la quantité

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)dt}$$

- On appelle variance de $x(t)$ sur $[a, b]$ et on note $\mathrm{var}(x)$ la quantité

$$\boxed{\mathrm{var}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b |x(t)-\bar{x}|^2\, dt}$$

Exemple : signal porte de durée L



$$\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \le t < +\frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Moyennes et variances sur $\left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{L}{2}-\left(-\frac{L}{2}\right)}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} 1dt = 1$$

$$\mathrm{var}(x) = \frac{1}{\frac{L}{2}-\left(-\frac{L}{2}\right)}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} |1-1|^2dt = 0$$

Moyenne et variance : signaux périodiques

Soit $x(t)$ un signal réel continu et périodique de période $T > 0$

- On appelle valeur moyenne de $x(t)$ sur une période et on note $\bar{x}$ la quantité

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{T}\int_{[T]} x(t)dt}$$

- On appelle variance de $x(t)$ sur une période et on note $\mathrm{var}(x)$ la quantité

$$\boxed{\mathrm{var}(x) = \frac{1}{T}\int_{[T]} |x(t) - \bar{x}|^2 \, dt}$$

- On peut démontrer la propriété suivante

$$\mathrm{var}(x) = P_x - |\bar{x}|^2$$

Exemple : sinusoïde

Signal $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ périodique de période $T = \frac{1}{f_0}$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin(2\pi f_0 t)dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0}\right]_{t=0}^{t=T} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(x) &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin(2\pi f_0 t)^2 dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1-\cos(4\pi f_0 t)}{2}\right] dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}dt - \frac{1}{2T}\left[\frac{\sin(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0}\right]_{t=0}^{t=T} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Moyenne et variance : cas quelconque

Soit $x(t)$ un signal réel défini sur $\mathbb{R}$

- On appelle valeur moyenne de $x(t)$ sur $\mathbb{R}$ et on note $\bar{x}$ la quantité

$$\boxed{\bar{x} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} x(t)dt}$$

- On appelle variance de $x(t)$ sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathrm{var}(x)$ la quantité

$$\boxed{\mathrm{var}(x) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} |x(t) - \bar{x}|^2 \, dt}$$

Sommaire

Transformations des signaux

Amplification - Translation

Signal $x(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$, transformé en un signal $y(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Amplification

$$\boxed{y(t) = A \times x(t),\ \text{paramètre } A \in \mathbb{R}^+}$$

- Si $A > 1$, on forme un signal avec une amplitude plus élevée
- Si $A < 1$, on diminue l'amplitude du signal

Translation

$$\boxed{y(t) = x(t - t_0),\ \text{paramètre } t_0 \in \mathbb{R}}$$

- Si $t_0 > 0$, translation vers la droite (vers les temps positifs)
- Si $t_0 < 0$, translation vers la gauche (vers les temps négatifs)

Retournement temporel - Contraction/dilatation

Signal $x(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$, transformé en un signal $y(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Retournement temporel

$$\boxed{y(t) = x(-t)}$$

- Inversion de l'axe des temps : correspond à une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées

Contraction/dilatation temporelle

$$\boxed{y(t) = x(\alpha t),\ \text{paramètre } \alpha \in \mathbb{R}^+}$$

- Si $\alpha > 1$, contraction temporelle : on obtient un signal α plus court
- Si $\alpha < 1$, dilatation : on obtient un signal $\frac{1}{\alpha}$ plus long

Filtrage linéaire

Signal $x(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$, transformé en un signal $y(t) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Filtrage linéaire : sortie du filtre s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, x(\tau) d\tau}$$

$$y(t) = (h * x)(t)$$

$*$: produit de convolution

$$\boxed{h(t) \in \mathbb{R} \text{ : réponse impulsionnelle}}$$

Produit de convolution

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, f(\tau) d\tau}$$

Quelques propriétés :

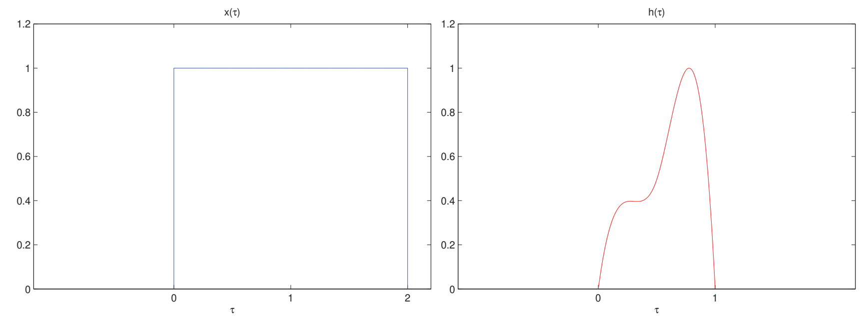
- Commutativité : $\boxed{f * g = g * f}$
- Distributivité : $\boxed{f * (g + h) = f * g + f * h}$
- Associativité : $\boxed{(f * g) * h = f * (g * h)}$

Produit de convolution

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau$$

- $g(\tau)$: signal $g(\tau)$ multiplié par...
- ... $f(t-\tau)$: signal $f(\tau)$ inversé temporellement puis translaté de t vers la droite...
- ... $\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau$ dont on prend l'aire sous la courbe

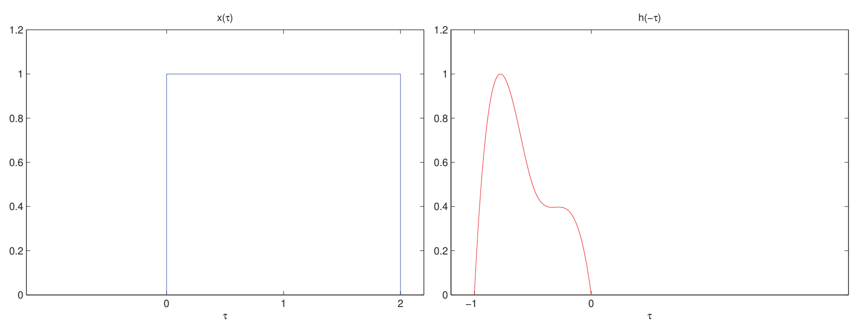
Exemple



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Ici $x(\tau) \in [0, 2]$ et $h(\tau) \in [0, 1]$

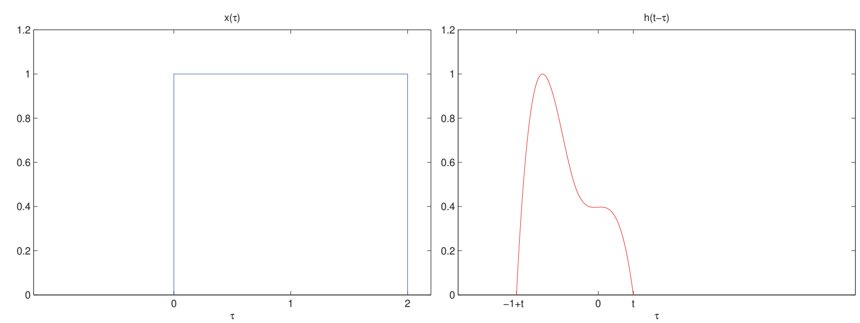
Exemple



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Ici $x(\tau) \in [0, 2]$ et $h(-\tau) \in [-1, 0]$
Etape 1 : retournement temporel du signal $h(\tau)$...

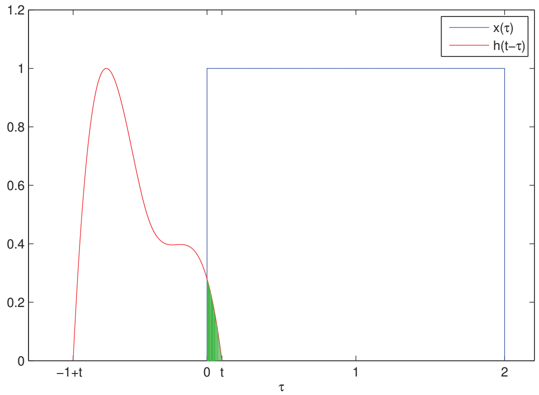
Exemple



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Ici $x(\tau) \in [0, 2]$ et $h(t-\tau) \in [-1+t, t]$
Etape 2 : ... puis translation de t pour former $h(t-\tau)$

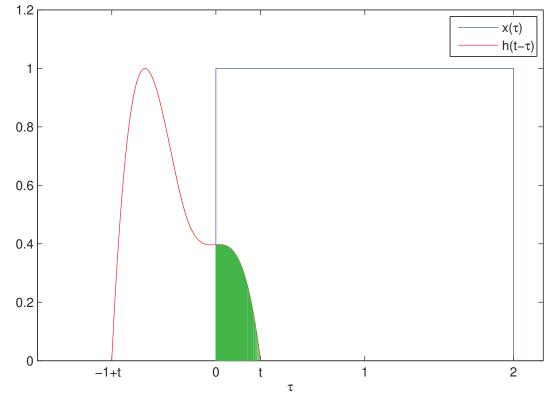
Exemple



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$y(t)$ = aire sous la courbe du produit de ces deux fonctions

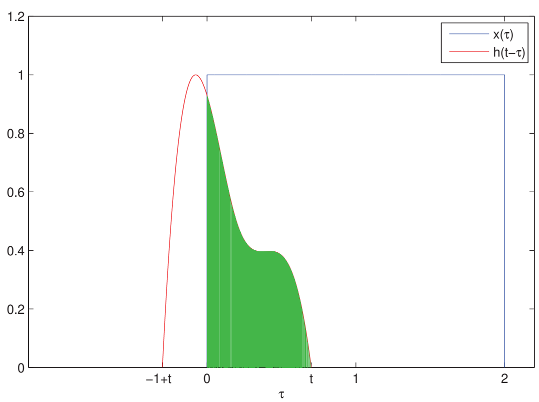
Exemple



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$y(t)$ = aire sous la courbe du produit de ces deux fonctions

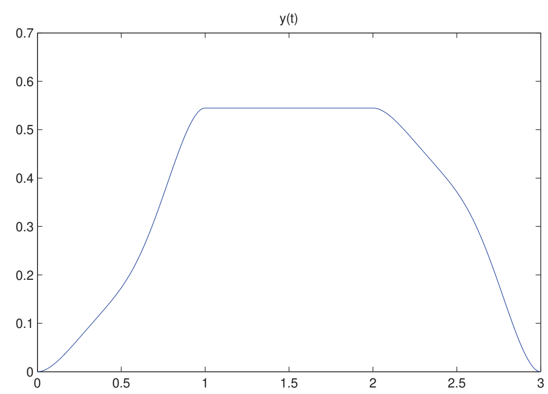
Exemple



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$y(t)$ = aire sous la courbe du produit de ces deux fonctions

Exemple



Remarque : Si le signal d'entrée $x(t)$ a un support temporel borné $[x_{min}, x_{max}]$ et que la réponse impulsionnelle $h(t)$ un support temporel borné $[h_{min}, h_{max}]$, alors le signal de sortie $y(t)$ a un support temporel borné égal à $[x_{min} + h_{min}, x_{max} + h_{max}]$

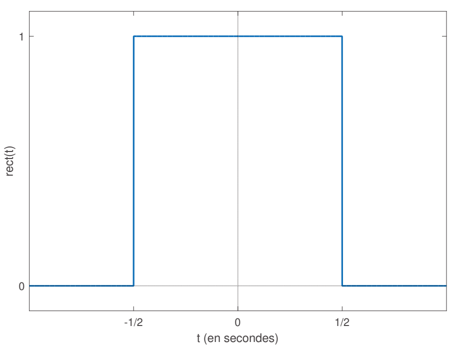
Sommaire

Modèles de signaux

Modèles de signaux

- Nous allons dans cette partie définir un certain nombre de signaux, n'ayant pas nécessairement de réalité physique (durée infinie, énergie infinie, discontinuités), mais qui sont des modèles très utilisés en traitement du signal, électronique, physique, etc...
- Il faudra apprendre à les manipuler et à les utiliser.
- Certains de ces signaux sont réellement des signaux, et d'autres sont des *distributions*, qui est une notion un peu plus compliquée à définir. Ces distributions, en plus de contenir des discontinuités, peuvent prendre des valeurs infinies.

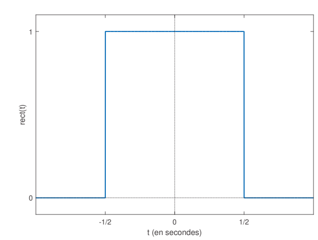
Fonction rectangulaire



$$\boxed{\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

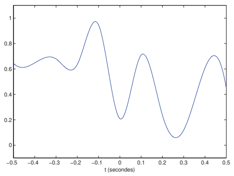
- Modélise une observation de durée finie
- Equivaut à un signal porte de durée $L = 1$ (cf cours ITS)
- La définition aux points $t = \pm\dfrac{1}{2}$ peut varier

Fonction rectangulaire

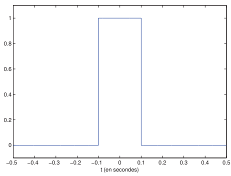


- Support temporel borné $\left]-\dfrac{1}{2}, +\dfrac{1}{2}\right[$
- Signal pair et non causal
- Energie finie $E_x = 1$
- Deux points de discontinuité $t = \pm\dfrac{1}{2}$

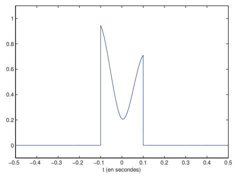
Fonction rectangulaire



$\times$



$=$



- Tout signal à support temporel borné $[t_{min}, t_{max}]$ peut être vu comme le produit d'un signal à support temporel non borné défini sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction rectangulaire $\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$ avec

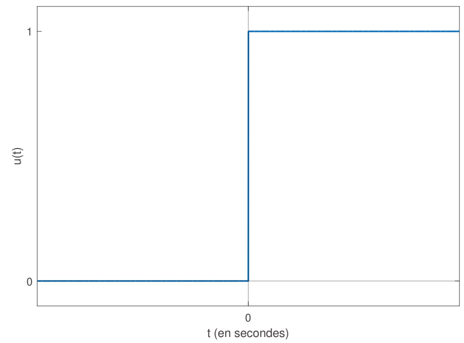
$$t_0 = \frac{t_{min} + t_{max}}{2}$$

$$T = t_{max} - t_{min}$$

- En particulier un signal porte de durée L peut s'écrire

$$\Pi_L(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{L}\right)$$

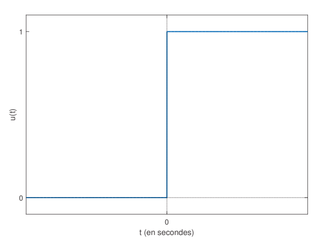
Fonction échelon



$$\boxed{\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

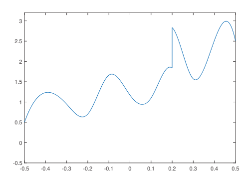
- Valeur en 0 non définie. On peut par exemple prendre $\mathrm{u}(0) = \frac{1}{2}$, 0 ou 1.
- Modélise l'établissement instantané d'un régime continu
- On l'appelle également fonction de Heavisde

Fonction échelon

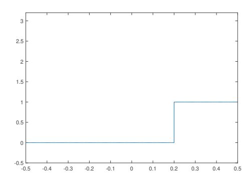


- Support temporel non borné $[0, +\infty[$
- Signal causal
- Puissance finie $P_x = \frac{1}{2}$
- Un point de discontinuité $t = 0$

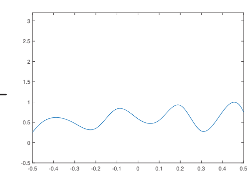
Fonction échelon



$=$



$+$



- Tout signal $x(t)$ défini sur I et comportant une discontinuité finie en t_0 peut être décomposé comme la somme d'un signal $x_c(t)$ continu et dérivable sur I et d'une fonction échelon. Si l'on note $x(t_0^+)$ la valeur à droite et $x(t_0^-)$ la valeur à gauche, on peut écrire

$$x(t) = x_c(t) + \left(x(t_0^+) - x(t_0^-)\right) \times \mathrm{u}(t - t_0)$$

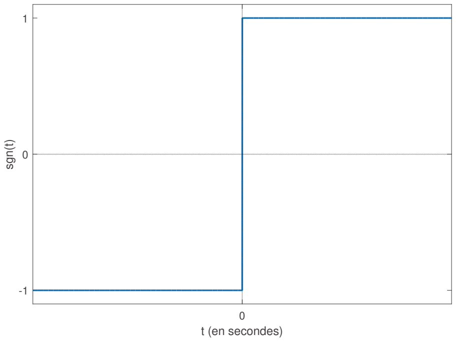
- Par exemple, on peut écrire la fonction rectangulaire sous la forme

$$\mathrm{rect}(t) = \mathrm{u}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{u}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

- Si on suppose qu'il y a N discontinuités finies en $t_1, t_2, \ldots, t_N$ on peut généraliser et écrire

$$\boxed{x(t) = x_c(t) + \sum_{i=1}^{N} \left(x(t_i^+) - x(t_i^-)\right) \times \mathrm{u}(t - t_i)}$$

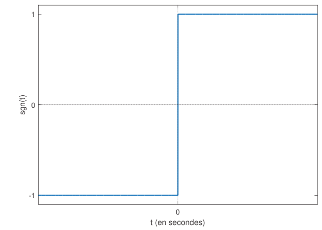
Fonction signe



$$\boxed{\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}}$$

- Valeur en 0 non définie. On peut par exemple prendre $\mathrm{sgn}(0) = 0$
- Cette fonction donne le signe du temps t : -1 s'il est négatif et 1 s'il est positif

Fonction signe



- Support temporel non borné $]-\infty, +\infty[$
- Signal impair
- Puissance finie $P_x = 1$
- Un point de discontinuité $t = 0$

Fonction signe

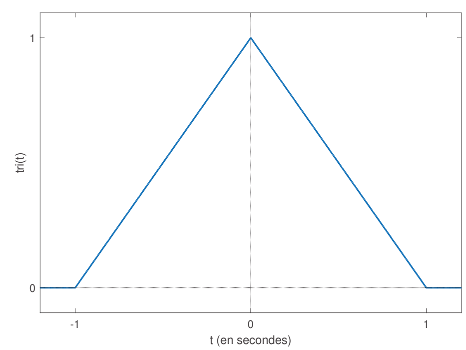
- Il existe un lien entre cette fonction signe et la valeur absolue

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad t = \mathrm{sgn}(t) \times |t|$$

- On peut l'écrire grâce à la fonction échelon

$$\mathrm{sgn}(t) = 2\,\mathrm{u}(t) - 1$$

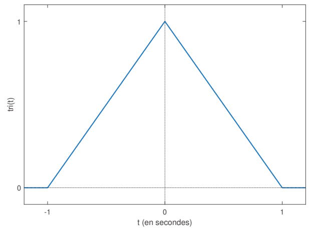
Fonction triangle



$$\boxed{\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Utilisée en télécommunications
- Parfois utilisée comme fenêtre d'observation

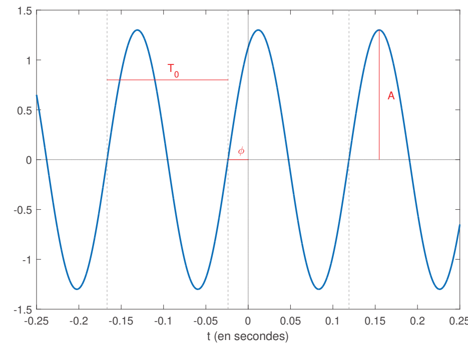
Fonction triangle



- Support temporel borné $[-1, 1]$
- Signal pair
- Energie finie $E_x = \frac{2}{3}$
- On a

$$\boxed{\mathrm{tri}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)}$$

Sinusoïde réelle



$A = 1.3$, $f_0 = 7$ Hz, $\phi = \frac{\pi}{3}$

$$\boxed{x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)}$$

- A : amplitude
- f_0 : fréquence fondamentale (en Hz)
- ϕ : phase à l'origine
- $x(t)$ est périodique de période fondamentale

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{f_0}}$$

- $\omega_0 = 2\pi f_0$: pulsation fondamentale (en rad.s^{-1})

Représentation complexe du signal sinusoïdal

Pour simplifier les calculs, notamment en physique, on introduit parfois une représentation complexe du signal sinusoïdal

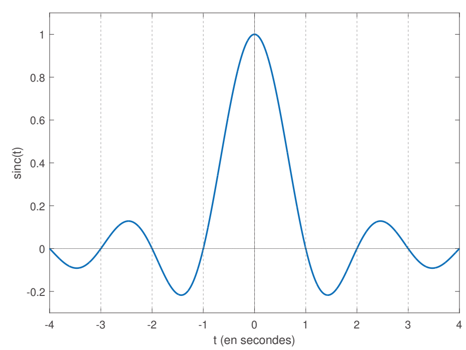
$$\boxed{x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t + j\phi}}$$

- A : amplitude
- f_0 : fréquence fondamentale (en Hz)
- ϕ : phase à l'origine
- $x(t)$ est périodique de période fondamentale

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{f_0}}$$

- $\omega_0 = 2\pi f_0$: pulsation fondamentale (en rad.s^{-1})

Sinus cardinal



$$\boxed{\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Apparaît naturellement lorsque l'on calcule la transformée de Fourier d'une fonction rectangulaire
- Il est aussi très utilisé en physique ondulatoire
- Ce signal s'annule pour tous les temps t entiers : il définit des bosses que l'on appelle des *lobes*. Le lobe principal a une largeur de 2.

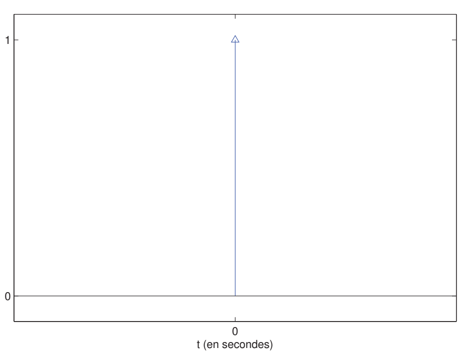
Sommaire

Introduction aux distributions

Distributions

- Dans le cours ITS, nous avions vu un autre *signal* très utile : le Dirac
- En réalité, l'impulsion de Dirac est ce que l'on appelle une **distribution**
- La théorie des distributions va être un outil très puissant pour nous aider à dériver des signaux qui ne sont pas a priori dérivables, à démontrer des propriétés théoriques, à modéliser l'échantillonnage etc...
- Dans ce cours, nous allons uniquement présenter quelques propriétés utiles (dont la plupart seront admises)

Distribution de Dirac : définition formelle



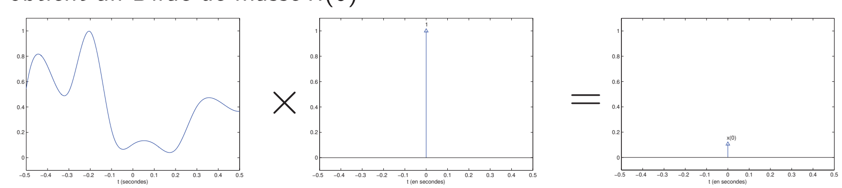
$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- On le représente par une flèche entre 0 et 1 (attention à ne pas confondre avec un signal discret). La valeur 1 représente la masse (ou *amplitude*) du Dirac.
- Il s'agit d'un *signal* infiniment bref, d'intégrale égale à 1 et d'énergie infinie. Il vérifie la propriété suivante :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}$$

Distribution de Dirac : définition formelle

- Si on prend un signal $x(t)$ continu en 0 et qu'on le multiplie par un Dirac, on obtient un Dirac de masse $x(0)$



- On a donc :

$$x(t) \times \delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- Plus généralement, si $x(t)$ est continu en t_0 on a la propriété :

$$\boxed{x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)}$$

Dirac et convolution

- Le Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution :

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, x(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, x(t) d\tau \\ &= x(t) \end{aligned}$$

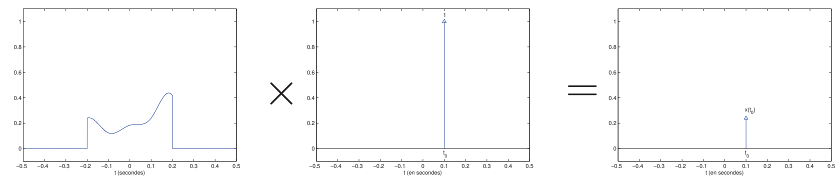
- De la même façon, on a :

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, x(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0-\tau)\, x(t-t_0) d\tau \\ &= x(t-t_0) \end{aligned}$$

Attention !

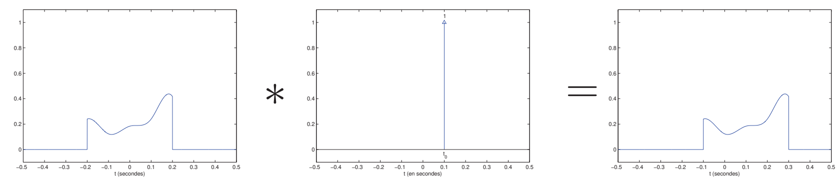
- Produit par un Dirac centré en t_0

$$\boxed{x(t) \times \delta(t-t_0) = x(t_0)\ \delta(t-t_0)}$$



- Produit de convolution par un Dirac centré en t_0

$$\boxed{x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)}$$



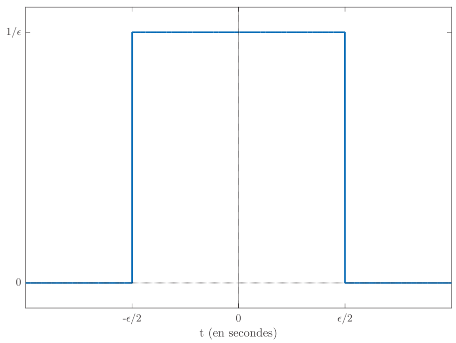
Limites de la définition formelle

- Cette définition permet de faire certains calculs, mais pas nécessairement de comprendre ce que représente un Dirac
- Nous allons présenter deux visions de ce Dirac
  - Une vision physique qui verra le Dirac comme la limite d'un signal usuel ayant une réalité physique
  - Une vision mathématique qui permettra de faire des calculs et de gérer les discontinuités des signaux usuels

Vision physique du Dirac

- Imaginons un opérateur qui donne un coup de marteau sur un objet et intéressons nous à la force exercée par le marteau sur l'objet
- Cette force, d'abord nulle, monte très rapidement à une valeur élevée puis redescend à zéro très rapidement
- La durée d'application de la force est très brève, son intensité est très grande mais la quantité de mouvement est nécessairement finie
- On peut modéliser ce phénomène par une fonction rectangulaire de durée ϵ (petite) et d'amplitude $\frac{1}{\epsilon}$ (grande)

Vision physique du Dirac



- Considérons $\epsilon > 0$ et le signal

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\,\text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

- On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)dt = 1$$

et

$$E_{\delta_\epsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_\epsilon(t)|^2\, dt = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} 1dt = \frac{1}{\epsilon}$$

- On observe que lorsque $\epsilon \to 0$, on a

$$E_{\delta_\epsilon} \to +\infty \text{ mais on garde}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)dt = 1$$

La distribution de Dirac peut être vue comme la limite du signal δ_ϵ lorsque ϵ tend vers 0

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$$

Vision physique du Dirac

- Grâce à cette définition on peut démontrer un certain nombre de propriétés, en remplaçant le Dirac par sa définition sous forme de limite
- Exemple :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t)dt \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)dt \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} 1dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Vision physique du Dirac

- Autre exemple. Considérons un signal $x(t)$ continu en t_0 et intégrable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)x(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t-t_0)x(t)dt \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t-t_0)x(t)dt \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\int_{t_0-\frac{\epsilon}{2}}^{t_0+\frac{\epsilon}{2}} x(t)dt \qquad u = \frac{t-t_0}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(\epsilon u + t_0)du \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t_0)du = x(t_0)
\end{aligned}$$

- Ainsi, en prenant cette définition physique, on s'aperçoit que les propriétés (admises jusque là) ont un sens également physique

Vision mathématique du Dirac

- Considérons D, l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support temporel borné et fermé
- On appelle **distribution** toute application linéaire $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned}
D &\to \mathbb{R} \\
\varphi &\to \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}(t)\varphi(t)dt
\end{aligned}$$

La distribution de Dirac est l'application linéaire δ qui à toute fonction φ de D fait correspondre sa valeur en 0

$$\forall \varphi \in D, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

Vision mathématique du Dirac

- Deux distributions $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont égales si et seulement si

$$\forall \varphi \in D, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_1(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_2(t)\varphi(t)dt$$

- Ce qui est crucial ici, c'est que démontrer que deux distributions sont égales nécessite uniquement de démontrer l'égalité de ces deux intégrales pour un ensemble de fontions φ
- Il existe un lien entre ceci et la notion de signaux égaux presque partout que nous avions vu précédemment. L'idée est que l'on peut mesurer (donc comprendre) un signal en se basant sur la valeur de certaines intégrales.
- Cette particularité des distributions est fondamentale et va nous permettre de travailler facilement dessus, et notamment de démontrer les propriétés du Dirac

Propriétés du Dirac

- Exemple. Considérons un signal $x(t)$ continu en t_0 et intégrable sur $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi \in D$. On va considérer la distribution $\mathcal{T}_1(t) = x(t) \times \delta(t - t_0)$ et la distribution $\mathcal{T}_2(t) = x(t_0) \times \delta(t - t_0)$ et montrer qu'elles sont égales.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_1(t)\varphi(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)\varphi(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(u + t_0)\varphi(u + t_0)\right] \delta(u)du \quad u = t - t_0 \\
&= x(t_0)\varphi(t_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_2(t)\varphi(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0)\delta(t - t_0)\varphi(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t_0)\varphi(u + t_0)\right] \delta(u)du \quad u = t - t_0 \\
&= x(t_0)\varphi(t_0)
\end{aligned}$$

Donc on a bien $x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0) \times \delta(t - t_0)$

Dérivation au sens des distributions

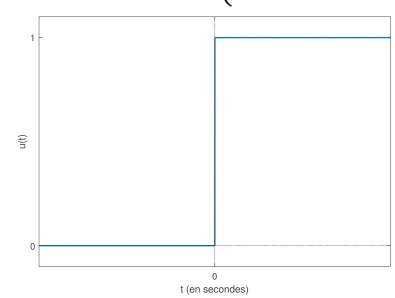
- Nous avons vu que certains signaux présentent des discontinuités et ne sont donc pas dérivables en ces points
- La théorie des distributions va nous permettre néanmoins de les dériver **au sens des distributions**
- Ceci signifie que cette fonction *dérivée* que l'on va définir produira les mêmes intégrales que celles que l'on aurait obtenu si la dérivation avait été possible
- Concrètement si on considère une fonction $f(t)$ non dérivable mais que l'on arrive à montrer que pour toute fonction $\varphi \in D$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\varphi(t)dt$$

alors cela signifira que l'on peut définir une dérivée pour $f(t)$ *au sens des distributions* et que $f' = g$.

Dérivation au sens des distributions : fonction échelon

- Considérons la fonction échelon $\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



- Ce signal possède une discontinuité en $t = 0$ et n'est donc pas dérivable sur $\mathbb{R}$
- On va donc considérer que $\mathrm{u}'(t)$ existe, mais au sens des distributions. Pour estimer $\mathrm{u}'(t)$ on va calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{u}'(t)\varphi(t)dt$$

pour une fonction quelconque $\varphi \in D$

Dérivation au sens des distributions : fonction échelon

Soit $\varphi \in D$, une fonction infiniment dérivable à support temporel borné et fermé

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{u}'(t)\varphi(t)dt &= \Big[\mathrm{u}(t)\varphi(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{u}(t)\varphi'(t)dt \quad \text{or } \varphi \text{ est à support borné} \\
&= 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{u}(t)\varphi'(t)dt \\
&= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(t)dt \\
&= -\Big[\varphi(t)\Big]_{0}^{+\infty} \quad \text{or } \varphi \text{ est à support borné} \\
&= \varphi(0)
\end{aligned}$$

Dérivation au sens des distributions : fonction échelon

- On a donc

$$\forall \varphi \in D, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{u}'(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

- Mais par définition du Dirac on a également

$$\forall \varphi \in D, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

- Finalement on obtient

$$\forall \varphi \in D, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{u}'(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt$$

ce qui signifie que les distributions $\mathrm{u}'(t)$ et $\delta(t)$ sont égales

$$\boxed{\mathrm{u}'(t) = \delta(t)}$$

Dérivation au sens des distributions : cas général

- On pourrait réutiliser le même principe pour dériver au sens des dérivations la plupart des signaux même s'ils ne sont pas explicitement continus ou dérivables
- En réalité dans le cadre de ce cours, on se limitera aux signaux possédant un nombre fini N de discontinuités finies. Dans ce cas, on a déjà vu que ces signaux peuvent s'écrire

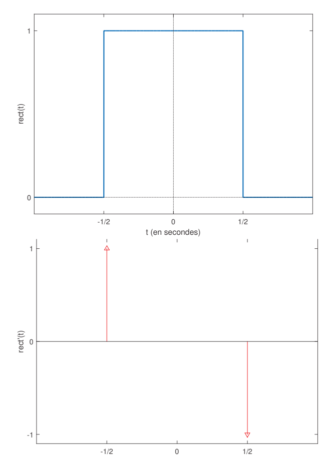
$$x(t) = x_c(t) + \sum_{i=1}^{N} \left(x(t_i^+) - x(t_i^-)\right) \times \mathrm{u}(t - t_i)$$

où $x_c(t)$ est un signal continu et dérivable.

- En utilisant le fait que $u'(t) = \delta(t)$, on peut donc facilement dériver ces signaux au sens des distributions en écrivant

$$x'(t) = x_c'(t) + \sum_{i=1}^{N} \left(x(t_i^+) - x(t_i^-)\right) \times \delta(t - t_i)$$

Dérivation au sens des distributions : exemple



- Pour la fonction rectangulaire, il y a deux discontinuités en $t \pm \frac{1}{2}$

$$\mathrm{rect}\left(-\frac{1}{2}^-\right) = 0 \quad \mathrm{rect}\left(-\frac{1}{2}^+\right) = 1$$

$$\mathrm{rect}\left(+\frac{1}{2}^-\right) = 1 \quad \mathrm{rect}\left(+\frac{1}{2}^+\right) = 0$$

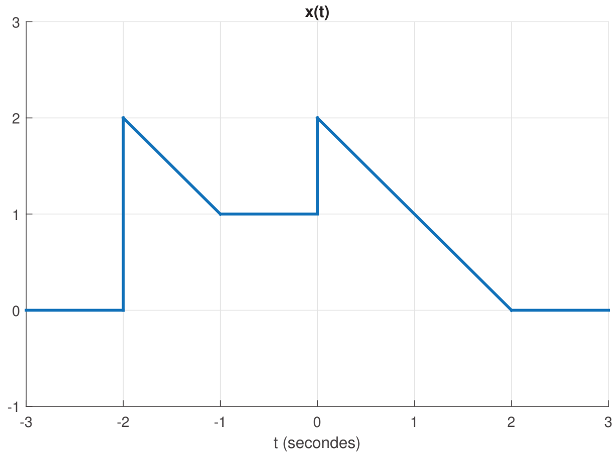
- On a donc

$$\mathrm{rect}(t) = \mathrm{u}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{u}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

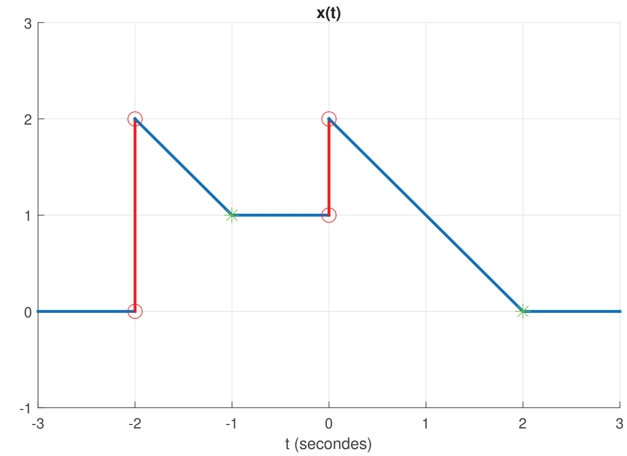
- On peut définir une dérivée au sens des distributions

$$\mathrm{rect}'(t) = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Dérivation au sens des distributions : exemple

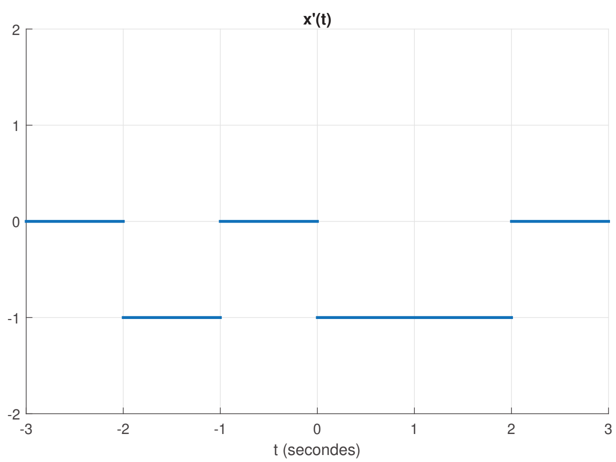


Dérivation au sens des distributions : exemple



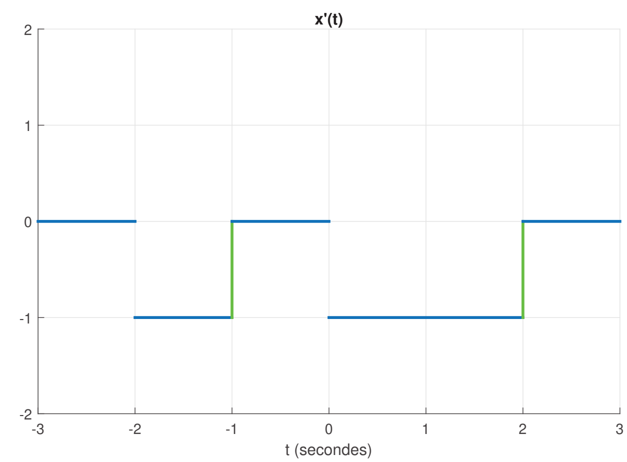
Etape 1 : Identifier les points de discontinuité (en rouge) et de non-dérivabilité (en vert)

Dérivation au sens des distributions : exemple



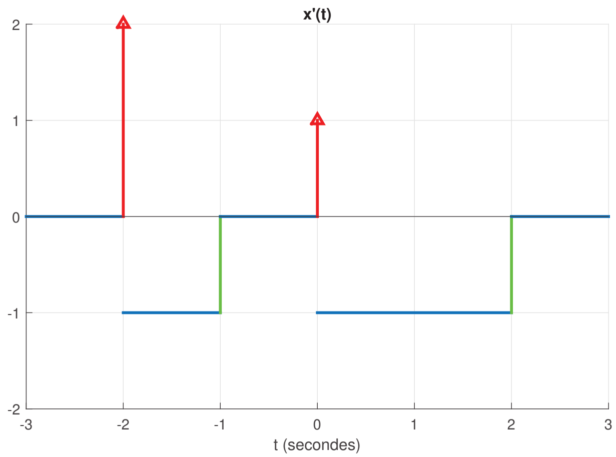
Etape 2 : Commencer par dériver les parties dérivables du signal

Dérivation au sens des distributions : exemple



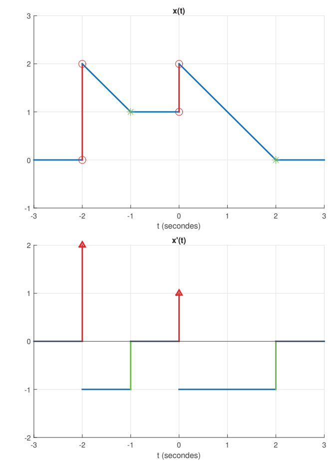
Etape 3 : Les points de non-dérivabilités forment des discontinuité sur la dérivée

Dérivation au sens des distributions : exemple



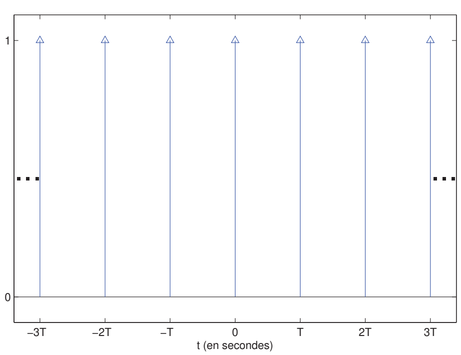
Etape 4 : Les discontinuités sur le signal sont capturées par les Dirac

Dérivation au sens des distributions : exemple



- Pour déterminer l'amplitude des Dirac il faut lire le signal de la gauche vers la droite
- En -2, le signal passe de 0 à 2, on a donc une différence de $+2$
- En 0, le signal passe de 1 à 2, on a donc une différence de $+1$

Peigne de Dirac



$$\boxed{\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)}$$

- Le peigne de Dirac $\text{III}_T(t)$ est une distribution
- Il s'agit d'une version périodisée du Dirac : un Dirac de masse 1 apparaît à chaque temps $t = nT$
- C'est un *signal* périodique de période fondamentale T

Peigne de Dirac

- De la même façon que l'on a démontré que $x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0) \times \delta(t - t_0)$, on pourrait, en utilisant la théorie des distributions démontrer que, si $x(t)$ est un signal continu pour tous les temps t multiples de T, on a

$$\begin{aligned} x(t) \times \text{III}_T(t) &= x(t) \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \times \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \times \delta(t - nT) \end{aligned}$$

- Le peigne de Dirac est très utile pour modéliser de façon théorique le processus d'échantillonnage : on voit ici que l'on ne garde que les valeurs de $x(t)$ que pour les temps t multiples de la période T