Théorie du signal

Travaux Dirigés 3 : Séries de Fourier

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2018-2019

Exercice 1

1. On considère un réel $\alpha \in]0, 1]$ et le signal $x_\alpha(t)$, périodique de période T et défini sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ par :

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\alpha T}{2} \leq t < +\frac{\alpha T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Tracer le signal $x_\alpha(t)$ et calculer sa puissance moyenne totale P_{x_α}

   (b) Le signal est-il continu sur $\mathbb{R}$? Sinon, lister ses points de discontinuités.

   (c) Ecrire $x_\alpha(t)$ sous la forme d'une série de Fourier en calculant les coefficients de Fourier complexes $c_k(x_\alpha)$. Préciser ce qu'il se passe sur les points de discontinuités.

   (d) Le signal $x_\alpha(t)$ est-il pair ? Comment pourrait-on le voir grâce aux coefficients de Fourier ?

2. On considère un réel $A > 0$ et le signal $y(t)$, périodique de période T et défini sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$ par :

$$y(t) = \begin{cases} A & -\frac{T}{4} \leq t < +\frac{T}{4} \\ -A & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Calculer la puissance moyenne totale P_y de $y(t)$

   (b) Exprimer $y(t)$ en fonction de $x_\alpha(t)$

   (c) Sans faire de calculs, calculer la décomposition en série de Fourier du signal $y(t)$.

   (d) Tracer en fonction de k l'allure du module au carré $|c_k(y)|^2$ des coefficients de Fourier

   (e) En utilisant le théorème de Parseval, démontrer que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 2

1. Montrer que la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ d'un signal $x(t)$ périodique de période T est également périodique de même période.

2. Montrer que si $x(t)$ peut se décomposer en série de Fourier sous la forme

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(x) e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

   alors $\gamma_x(\tau)$ admet également une telle décomposition et que l'on a :

$$c_k(\gamma_x) = |c_k(x)|^2$$

3. On considère le signal $x(t)$, périodique de période $T = 2$ et défini par :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\,(t - kT)$$

   Calculer sa décomposition en série de Fourier.

4. Montrer que la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ de $x(t)$ peut s'écrire

$$\gamma_x(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{tri}\,(t - kT)$$

5. En déduire ses coefficients de Fourier

Exercice 3

On considère le signal $x(t)$, périodique de période 2π, et défini sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$x(t) = |t| \qquad \text{pour } t \in [-\pi, +\pi[$$

1. Tracer le signal $x(t)$
2. Que peut-on dire sur ces coefficients de Fourier réels $a_k(x)$ et $b_k(x)$?
3. Calculer la décomposition de $x(t)$ en série de Fourier réelle
4. Le signal $x(t)$ est-il continu en 0 ? En déduire que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. Grâce au théorème de Parseval, montrer également que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Exercice 4

On considère un signal $x(t)$, continu, dérivable et périodique de période 2π, tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x'(t) = x(t + \lambda)$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$(jk - e^{jk\lambda})c_k(x) = 0$$

2. En déduire que pour quelle(s) valeur(s) de λ on peut effectivement trouver une solution non identiquement nulle