Théorie du signal

Exercices corrigés 7 : Introduction aux signaux aléatoires - Notion de bruit

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X distribuée uniformément sur $[a, b]$ avec $a < b$. Sa densité de probabilité se note

$$p_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

1. Calculer son espérance $\mathbb{E}[X]$
2. Calculer sa variance $\mathrm{var}[X]$
3. On considère une variable aléatoire Y uniformément distribuée sur $[0, 1]$ et la variable Z définie par

$$Z = \alpha Y + \beta$$

   (a) Calculer l'espérance et la variance de Y
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Z
   (c) Comment faut-il choisir α et β pour que Z soit distribuée uniformément sur $[a, b]$?

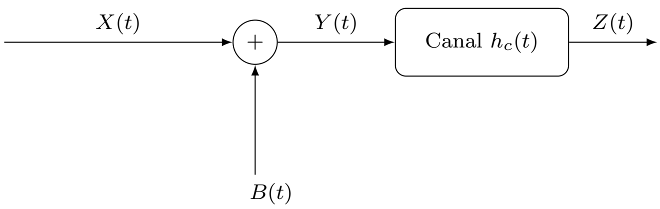
Exercice 2

On considère la variable aléatoire θ, distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$, et le signal aléatoire $X(t)$ défini par :

$$X(t) = \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

1. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire θ
2. Calculer $\mathbb{E}[X(t)]$: le signal est-il stationnaire d'ordre 1 ?
3. Calculer $\mathbb{E}[X(t)X(t + \tau)]$: le signal est-il stationnaire d'ordre 2 ?
4. Le signal $X(t)$ est-il stationnaire au sens large ?
5. Calculer et tracer sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$

Exercice 3



On considère un signal aléatoire $X(t)$ en bande de base, de puissance moyenne totale $P_X = 10^{-6}$ W et de largeur de bande $B = 100$ kHz. Il est envoyé sur un canal de transmission modélisé comme la succession d'un bruit blanc additif $B(t)$ de densité spectrale de puissance $\frac{N_0}{2}$ avec $N_0 = 10^{-14}$ W/Hz et d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h_c(t)$ ayant comme fonction de transfert :

$$H_c(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer l'énergie totale E_{h_c} du filtre h_c
2. Quelle est la bande passante BP du filtre h_c ?
3. Exprimer $Z(t)$ en fonction de $X(t)$, $B(t)$ et $h_c(t)$.
4. Identifier le terme lié au signal et le terme lié au bruit. Quelle condition doit vérifier BP pour qu'on ne perde pas d'information ?
5. On suppose dans la suite que $BP = B$. On notera $X' = (X * h_c)$ et $B' = (B * h_c)$.
   (a) Calculer la densité spectrale de puissance $S_{X'}(f)$ et en déduire la valeur de la puissance moyenne totale $P_{X'}$
   (b) Calculer la densité spectrale de puissance $S_{B'}(f)$ et en déduire la valeur de la puissance moyenne totale $P_{B'}$
   (c) Calculer le rapport signal sur bruit SNR en fonction de P_X, N_0 et B
   (d) Calculer la valeur $SNR|_{dB}$ en décibels