Théorie du signal

Exercices corrigés 6 : Echantillonnage et reconstruction

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

On considère un signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est

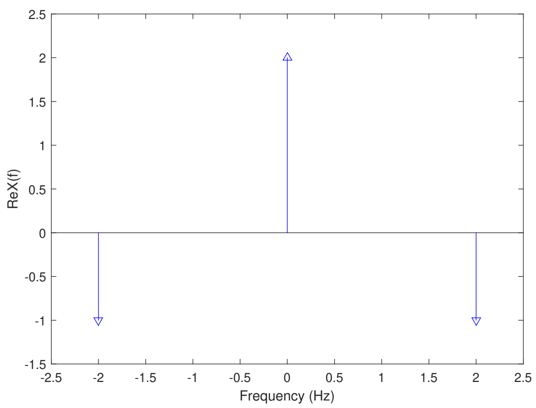
$$X(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| < 2 \text{ Hz} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

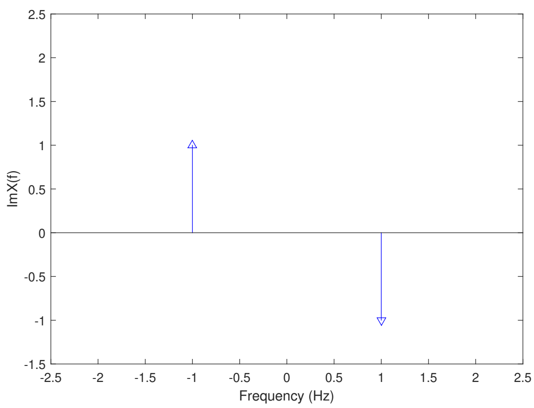
On souhaite échantilloner ce signal grâce à un échantillonneur idéal de fréquence d'échantillonnage F_e. Tracer l'allure du spectre du signal échantillonné $X_e(f)$ pour

1. $F_e = 5$ Hz
2. $F_e = 4$ Hz
3. $F_e = 3$ Hz

Exercice 2

On considère un signal $x(t)$ dont la transformée de Fourier est tracée ci-dessous





1. Ecrire l'équation de $X(f)$
2. En déduire l'équation de $x(t)$. Quelle est sa période fondamentale T ?
3. Calculer l'énergie totale et la puissance moyenne de $x(t)$
4. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale F_e qu'on l'on peut choisir afin de respecter le critère de Nyquist ?
5. On choisit $F_e = 10$ Hz.
   (a) Tracer l'allure du spectre $X_e(f)$ obtenu après échantillonnage idéal.
   (b) Comment peut-on reconstruire $x(t)$ à partir de $x_e(t)$?
6. On choisit $F_e = 3$ Hz.

(a) Tracer l'allure du spectre $X_e(f)$ obtenu après échantillonnage idéal.

(b) Quelles sont les fréquences qui apparaissent dans la bande $\left[-\frac{F_e}{2}, +\frac{F_e}{2}\right]$?

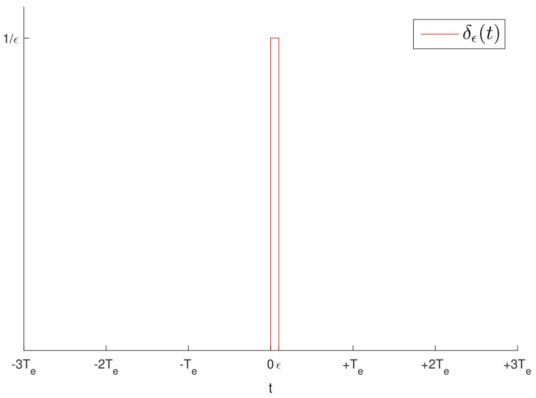
(c) Quel est l'expression du signal $\hat{x}(t)$ reconstruit par filtrage passe-bas ?

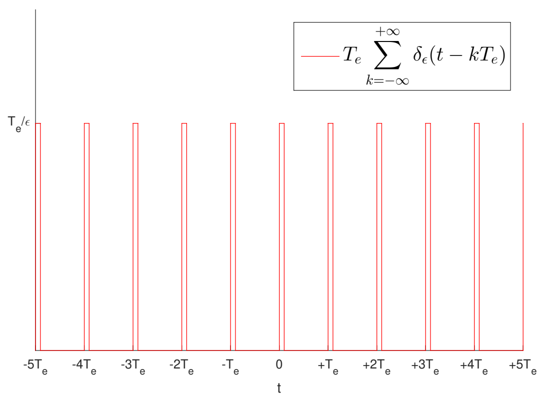
(d) Calculer sa puissance moyenne

Exercice 3

1. On considère les signaux

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{\epsilon}{2}}{\epsilon}\right) \qquad \text{et} \qquad \Delta_\epsilon(t) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t - nT_e)$$

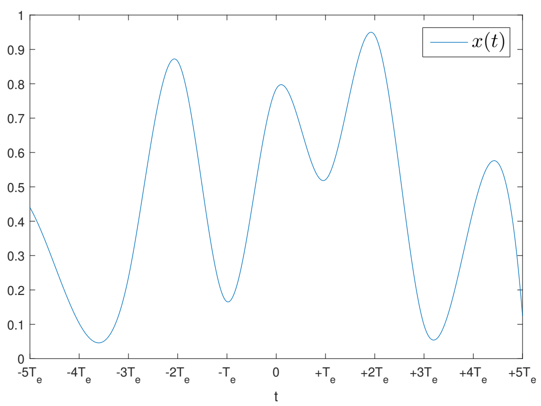


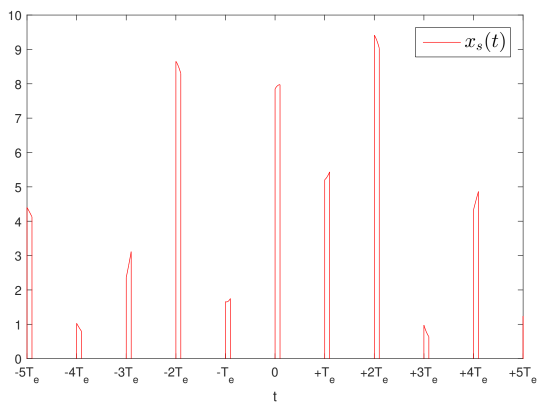


(a) Calculer la transformée de Fourier du signal $\delta_\epsilon(t)$

(b) Calculer la transformée de Fourier du signal $\Delta_\epsilon(t)$

2. On considère un signal $x(t)$ vérifiant le critère de Nyquist. On souhaite échantillonner ce signal grâce à un échantillonneur suiveur qui transforme le signal $x(t)$ en un signal $x_s(t)$. Le signal échantillonné $x_s(t)$ recopie $x(t)$ entre kT_e et $kT_e + \epsilon$





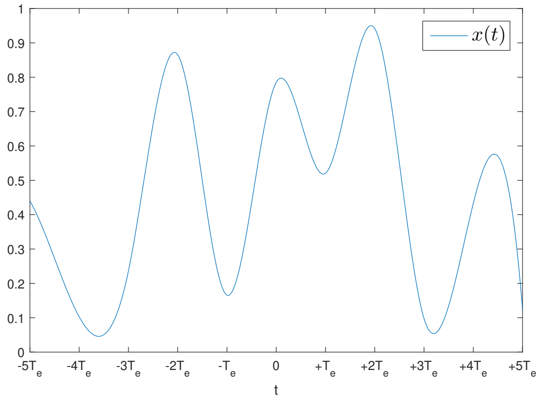
(a) Exprimer $x_s(t)$ à partir de $x(t)$ et $\Delta_\epsilon(t)$. Donner le schéma bloc modélisant cet échantillonneur.

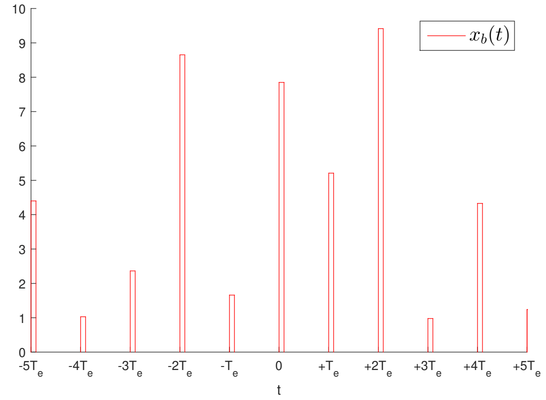
(b) En déduire le spectre $X_s(f)$ de ce signal échantillonné

(c) Que se passe-t-il quand $\epsilon \to 0$?

(d) Comment pourrait-on reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $x_s(t)$? Cette reconstruction sera-t-elle parfaite ?

3. On considère un signal $x(t)$ vérifiant le critère de Nyquist. On souhaite échantillonner ce signal grâce à un échantillonneur bloqueur qui transforme le signal $x(t)$ en un signal $x_b(t)$. Le signal échantillonné $x_b(t)$ recopie $x(kT_e)$ entre kT_e et $kT_e + \epsilon$





(a) Donner l'expression du signal $x_e(t)$ obtenu par échantillonnage idéal

(b) Exprimer $x_b(t)$ à partir de $x_e(t)$ et $\delta_\epsilon(t)$. Donner le schéma bloc modélisant cet échantillonneur.

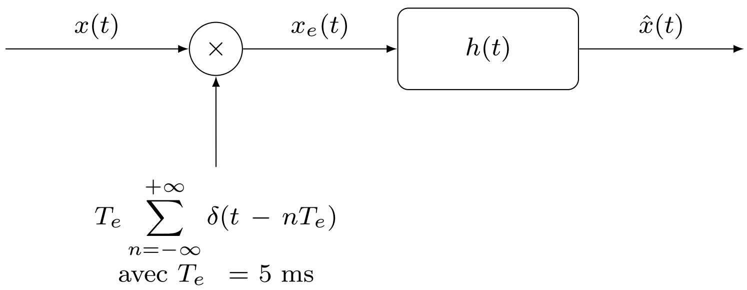
(c) En déduire le spectre $X_b(f)$ de ce signal échantillonné

(d) Que se passe-t-il quand $\epsilon \to 0$?

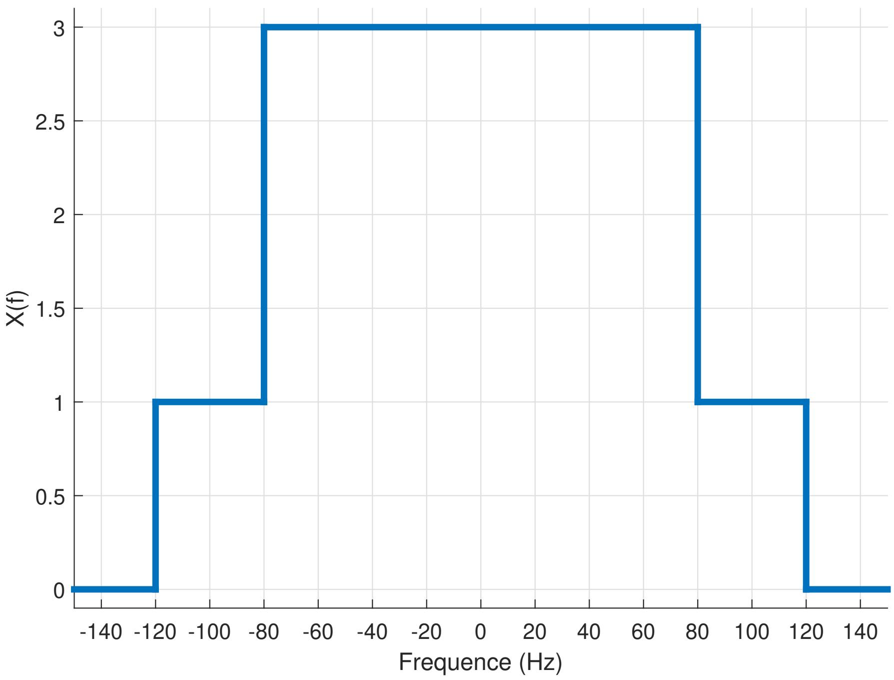
(e) Comment pourrait-on reconstruire le signal $x(t)$ à partir de $x_b(t)$? Cette reconstruction sera-t-elle parfaite ?

Exercice 4

Un système d'échantillonnage suivi d'une reconstruction est illustré par la figure suivante.



On souhaite échantillonner grâce à cet échantillonneur le signal $x(t)$, dont la transformée de Fourier $X(f)$ (supposée réelle) est donnée ci-dessous.



1. Caractériser l'échantillonneur utilisé et donner sa fréquence d'échantillonnage F_e.
2. Tracer la transformée de Fourier $X_e(f)$ du signal échantillonné pour $f \in [-200, 200]$
3. Donner l'expression du filtre que l'on doit utiliser pour reconstruire parfaitement le signal $x(t)$ à partir de $x_e(t)$
4. Tracer la transformée de Fourier du signal $\hat{X}(f)$ après reconstruction