Théorie du signal

Exercices corrigés 5 : Modélisation des systèmes

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

On considère les systèmes suivants, ayant comme entrée le signal $x(t)$ et comme sortie le signal $y(t)$. Dire pour chacun d'entre eux s'ils sont linéaires, invariants temporellement, dynamiques/instantanés, causaux et stables. On notera $X(f)$ et $Y(f)$ les transformées de Fourier des signaux $x(t)$ et $y(t)$. Dans les cas des systèmes SLI, donner la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.

1. $y(t) = \int_t^{t-A} x(\tau)d\tau$ avec A réel tel que $A > 0$
2. $Y(f) = X(f) + A$ avec avec A réel tel que $A \neq 0$
3. $y(t) = \mathrm{rect}(A - t)x(t)$ avec A réel
4. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} |x(\tau + A)|d\tau$ avec A réel tel que $A > 0$

Exercice 2

On considère deux réels a, b tels que $0 < a < b$ et le système caractérisé par la relation entrée/sortie suivante

$$y(t) = \int_{t-b}^{t-a} x(\tau)d\tau$$

1. Montrer que ce système est un SLI et donner sa réponse impulsionnelle $h(t)$
2. En étudiant la réponse impulsionnelle $h(t)$, dire si le système est causal et stable
3. Calculer la réponse en fréquence de ce filtre. S'agit-il d'un filtre passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande ?
4. Calculer la réponse indicielle $y_u(t)$ de ce filtre. Déterminer sa valeur stationnaire y_∞, le temps de réponse à 5% t_r et le temps de montée t_m
5. Calculer la réponse harmonique $y_{f_0}(t)$ de ce filtre. Quels seront les effets de ce filtre en terme d'amplification et de déphasage ?

Exercice 3

On considère un nombre complexe a quelconque et deux réels α et ω_0 strictement positifs.

1. Calculer la transformée de Laplace du signal $x(t) = e^{-at}\,\mathrm{u}(t)$ et déterminer sa région de convergence.
2. En déduire les transformées de Laplace et les régions de convergence des signaux suivants
   (a) $x(t) = e^{-\alpha t}\,\mathrm{u}(t)$
   (b) $x(t) = \cos(\omega_0 t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{u}(t)$
   (c) $x(t) = \sin(\omega_0 t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{u}(t)$

Exercice 4

On considère le filtre causal de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{8p + 19}{p^2 + 5p + 6}$$

1. Le filtre est-il stable ?
2. En utilisant une décomposition en éléments simples, en déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre.

Exercice 5

On considère un réel $\omega_0 > 0$ et le filtre causal ayant comme fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{p}}$$

1. Ce filtre est-il stable ?
2. Déterminer son type (passe-bas, passe-haut, etc...)
3. Tracer son diagramme de Bode (on pourra pour cela distinguer les cas $\omega << \omega_0$ et $\omega >> \omega_0$
4. Calculer sa pulsation de coupure ω_c