Théorie du signal

Exercices corrigés 4 : Transformée de Fourier - Densités spectrales

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie et α un réel non nul. On définit le signal

$$y(t) = x(\alpha t)$$

1. On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $Y(f) = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
2. On suppose $\alpha < 0$. Montrer que $Y(f) = -\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
3. En déduire que pour α quelconque $Y(f) = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

Exercice 2

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux à énergie finie

1. Montrer que $X^*(f) = \mathcal{TF}\left\{x^*(-t)\right\}$
2. En déduire que $\mathcal{TF}\left\{x(\tau) * y^*(-\tau)\right\} = X(f) \times Y^*(f)$
3. En déduire que $\mathcal{TF}\left\{x(t) * x^*(-t)\right\} = |X(f)|^2$

Exercice 3

On considère un réel $\alpha > 0$ et le signal $x(t)$ défini par :

$$x(t) = e^{-\alpha|t|}$$

1. Le signal est-il à énergie finie ?
2. Calculer sa transformée de Fourier $X(f)$
3. Calculer la densité spectrale d'énergie $\Gamma_x(f)$
4. Sans faire de calculs, donner la valeur des intégrales
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z|} dz \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} dz$$
5. En prenant $\alpha = 2\pi$ et en utilisant le résultat précédent montrer que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} e^{-j2\pi uv} du = \pi e^{-2\pi|v|}$$
6. En déduire la transformée de Fourier du signal
$$y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$
7. Calculer la transformée de Fourier du signal
$$z(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$$

Exercice 4

On considère un entier N strictement positif, des réels $A_0, \ldots, A_N$ et $\theta_1, \cdots, \theta_N$ et un réel $f_0 > 0$. Soit $x(t)$ le signal

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\left(2\pi n f_0 + \theta_n\right)$$

1. Le signal $x(t)$ est-il périodique ? Quelle est sa période fondamentale T ?
2. Calculer la décomposition en série de Fourier du signal $x(t)$
3. Calculer et tracer sa densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$

Exercice 5

On considère le signal $x(t)$ défini par

$$x(t) = \begin{cases} -t & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Tracer le signal $x(t)$. Est-il à énergie finie ou à puissance finie ?
2. Que peut-on d'ors et déjà dire sur sa transformée de Fourier ? (réelle/complexe, paire/impaire, valeur à l'origine)
3. Calculer la dérivée $y(t) = x'(t)$ du signal $x(t)$ au sens des dérivations. Montrer que

$$y(t) = -\operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \delta(t-1) + \delta(t+1)$$

4. Calculer la transformée de Fourier $Y(f)$ de $y(t)$
5. En remarquant que $y(t)$ a une composante continue nulle, en déduire la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$