Théorie du signal
Exercices corrigés 3 : Séries de Fourier

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1[ère] année

2018-2019

Exercice 1

On considère le signal

$$x(t) = \sin(150\pi t) + \cos(200\pi t)$$

1. Le signal $x(t)$ est-il périodique ? Déterminer sa période fondamentale T
2. Décomposer le signal $x(t)$ en série de Fourier
3. En déduire la puissance moyenne totale du signal $x(t)$

Exercice 2

Soit $x(t)$ un signal de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et deux réels λ et t_0. Démontrer que :

1. Si $x(t)$ est réel
$$c_{-k}(x) = c_k^*(x) \quad \text{symétrie hermitienne}$$
2. Si $x(t)$ est réel et pair
$$\begin{cases} c_k(x) \in \mathbb{R} & \text{réel} \\ c_{-k}(x) = c_k(x) & \text{pair} \end{cases}$$
3. Si $x(t)$ est réel et impair
$$\begin{cases} c_k(x) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^* & \text{imaginaire pur} \\ c_{-k}(x) = -c_k(x) & \text{impair} \end{cases}$$
4. Si l'on note $y(t) = x(t) + \lambda$ alors on a
$$\begin{cases} c_0(y) = c_0(x) + \lambda & k = 0 \\ c_k(y) = c_k(x) & k \neq 0 \end{cases}$$
5. Si l'on note $y(t) = x(t - t_0)$ alors on a
$$\forall k \quad c_k(y) = e^{-j\frac{2\pi k}{T}t_0} c_k(x)$$

Exercice 3

On considère le signal $x(t)$ en dents de scie, périodique de période 2π et défini sur $[-\pi, +\pi[$ par :

$$x(t) = t \qquad \text{pour } t \in [-\pi, +\pi[$$

1. Tracer le signal $x(t)$. Est-il continu sur $\mathbb{R}$?
2. Quelle est la composante continue $c_0(x)$ de ce signal ?
3. Le signal $x(t)$ est-il pair ou impair ? Que peut-on en conclure sur les coefficients complexes $c_k(x)$?

4. Calculer les coefficients de Fourier $c_k(x)$ et en déduire la décomposition de Fourier du signal $x(t)$. Que se passe-t-il aux points de discontinuités ?
5. Tracer en fonction de k l'allure du module au carré $|c_k(x)|^2$ des coefficients de Fourier
6. Grâce au théorème de Parseval, en déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

7. On considère maintenant le signal $y(t)$, périodique de période 2π et défini sur $[-\pi, +\pi[$ par :

$$x(t) = t^2 \qquad \text{pour } t \in [-\pi, +\pi[$$

   (a) Montrer que $y'(t) = x(t)$. En déduire une expression des coefficients $c_k(y)$ en fonction de $c_k(x)$ (attention au cas $k = 0$!).

   (b) En évaluant $y(t)$ en 0, montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 4

Soit $x(t)$ un signal réel de $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Démontrer que :

1. Le signal $x(t)$ est réel et pair si et seulement si

$$b_k(x) = 0 \qquad \forall k \geq 1$$

2. Le signal $x(t)$ est réel et impair si et seulement si

$$a_k(x) = 0 \qquad \forall k \geq 1$$

Exercice 5

On considère le signal

$$x(t) = 3 + \cos^2(120\pi t) + 2\cos(160\pi t)$$

1. Le signal $x(t)$ est-il périodique ? Si oui, quelle est sa période fondamentale ?
2. Calculer la décomposition de Fourier réelle du signal $x(t)$.