Théorie du signal

Exercices corrigés 2 : Représentation vectorielle des signaux

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2019-2020

Exercice 1

On considère un espace euclidien E, muni d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_N)$ une base orthonormale de E. Montrer que :

1. Décomposition sur une base orthonormale
$$\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \langle \vec{u} \mid \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$$
2. Calcul de la norme
$$\forall \vec{u} \in E, \quad \|\vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle \vec{u} \mid \vec{e}_i \rangle|^2$$
3. Inégalité de Cauchy Schwarz
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad |\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \ \|\vec{v}\|^2$$
   (a) On considère $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $P(\lambda) = \|\vec{u} + \lambda \vec{v}\|^2$
   (b) Sachant que $P(\lambda) \geq 0$, pour tout λ, quel propriété doit vérifier le déterminant Δ de ce polynome en λ ? En déduire l'inégalité de Cauchy Schwarz.
   Rappel : un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est positif sur $\mathbb{R}$ ssi $a > 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$
   (c) Que se passe-t-il quand $\Delta = 0$? En déduire le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwarz.
4. Inégalité triangulaire
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$
   On se servira de l'inégalité de Cauchy Schwarz.

Exercice 2

On considère un réel $T > 0$ et des entiers strictement positifs n et p. On définit les signaux
$$x_n(t) = \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$
$$y_p(t) = \sin\left(\frac{2\pi p t}{T}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

1. Quel est le support temporel de ces signaux ?
2. Ces signaux sont à énergie finie ou à puissance finie ? En déduire le type de produit scalaire que l'on doit utiliser pour ces signaux.
3. Tracer $x_1(t)$ et $x_2(t)$, ainsi que $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
4. Calculer les valeurs moyennes $\bar{x_n}$ et $\bar{y_p}$ de $x_n(t)$ et $y_p(t)$ sur leur support temporel.
5. Les signaux $x_n(t)$ et $y_p(t)$ sont-ils orthogonaux ?
6. Calculer les normes des signaux $x_n(t)$ et $y_p(t)$. En déduire l'énergie totale de ces signaux.
7. Calculer la distance euclidienne $d(x_n, y_p)$

Exercice 3

On considère un signal $x(t)$ à énergie finie. Montrer que

1. La fonction d'autocorrélation possède une symétrie hermitienne

$$\gamma_x(-\tau) = \gamma_x^*(\tau)$$

   En particulier si le signal $x(t)$ est réel, la fonction d'autocorrélation est paire

2. La valeur en $\tau = 0$ de l'autocorrélation est toujours réelle et correspond à l'énergie totale du signal

$$\gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

3. La fonction d'autocorrélation est maximale en $\tau = 0$

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad |\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0)$$

   On se servira de l'inégalité de Cauchy Schwarz.

Exercice 4

1. Calculer la fonction d'autocorrelation $\gamma_{\text{rect}}(\tau)$ de la fonction rectangulaire.
2. Montrer que si $x(t)$ est un signal réel à énergie finie et que $y(t) = x(t - t_0)$, alors la fonction d'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$ est maximale pour $\tau = -t_0$

Exercice 5

On considère $T > 0$ et l'espace $\mathcal{F}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des signaux à puissance finie, continus et périodiques de période T. On considère la base de fonctions

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Phi_k(t) = e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$$

1. Quel est le produit scalaire que l'on doit utiliser pour ces signaux ?
2. Montrer que la base $\{\Phi_k(t)\}_k$ est orthonormale
3. On considère le signal $x(t)$, qui est une version périodisée (de période $T = 2$) de la fonction rectangulaire $\text{rect}(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t - kT)$$

   (a) Calculer le produit scalaire entre $x(t)$ et $\Phi_k(t)$
   (b) En déduire une décomposition du signal $x(t)$ sur la base $\{\Phi_k(t)\}_k$
   (c) Calculer la norme du signal $x(t)$ de deux façons différentes et montrer que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \right|^2 = 2$$

Exercice 6

Calculer la fonction d'autocorrélation de la fonction échelon u(t)