

# Introduction au traitement du signal

## Cours 4 : Étude des signaux dans le domaine fréquentiel

Laurent Oudre  
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée  
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée  
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1<sup>ère</sup> année  
2018-2019

## Sommaire

### Une intuition de la transformée de Fourier

## Sommaire

### 1. Une intuition de la transformée de Fourier

### 2. Transformée de Fourier continue

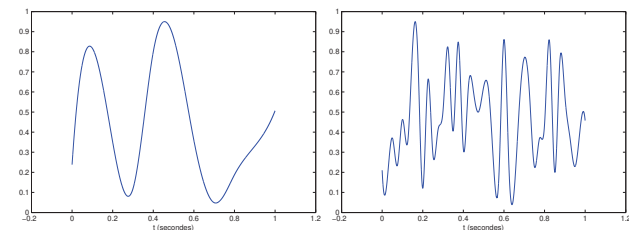
- 2.1 Définition et interprétation
- 2.2 Propriétés de la transformée de Fourier
- 2.3 Quelques transformées de Fourier usuelles
- 2.4 Liens entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel
- 2.5 Energies et théorème de Parseval

### 3. Transformée de Fourier discrète

- 3.1 Retour sur le critère de Nyquist
- 3.2 Définition
- 3.3 Limites de la transformée de Fourier discrète

## Bilan de l'étude dans le domaine temporel

- ▶ Jusqu'à présent, nous avons uniquement étudié notre signal à partir de son expression analytique, en calculant notamment son énergie totale et la puissance moyenne totale, et en étudiant sa périodicité, son support temporel, etc...
- ▶ Pour caractériser un signal, les outils à notre disposition sont donc limités. En particulier, lors de l'étude sur l'échantillonnage, nous avons vu que nous avons besoin de caractériser la lenteur/rapidité d'un signal.



- ▶ Cas simple : sinusoïde de fréquence fondamentale  $f_0$  qui permet de savoir exactement la rapidité du signal.

→ Et si, quelque soit le signal, on pouvait le ramener à des sinusoïdes ?

## Intuition de la transformée de Fourier

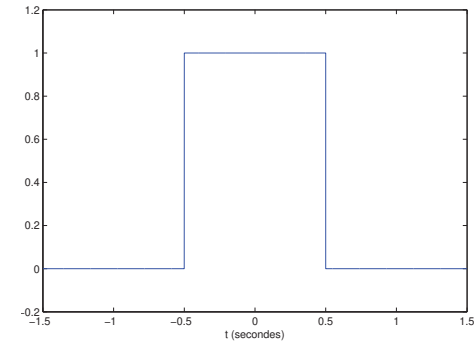
- **Propriété (admise)** : Tout signal  $x(t)$  réel, suffisamment régulier et d'énergie finie peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de sinusoides d'amplitudes, fréquences fondamentales et phases à l'origine différentes.

$$x(t) = \int_0^{+\infty} A(f) \sin(2\pi ft + \phi(f)) df$$

avec  $A(f) \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(f) \in [0, 2\pi[$ .

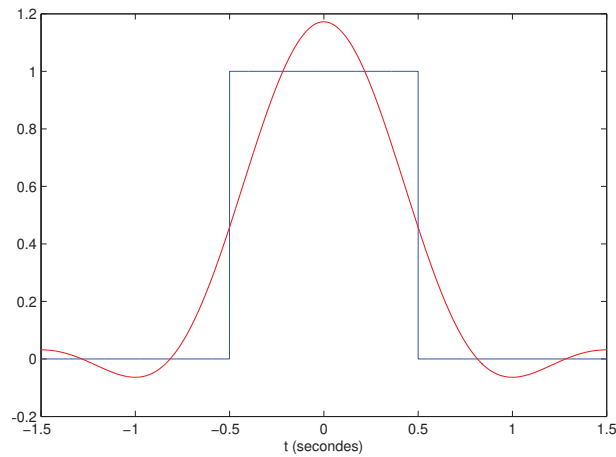
- L'intégrale peut être ici vue comme une somme sur l'ensemble des fréquences comprises entre 0 et  $+\infty$

## Exemple : Signal porte



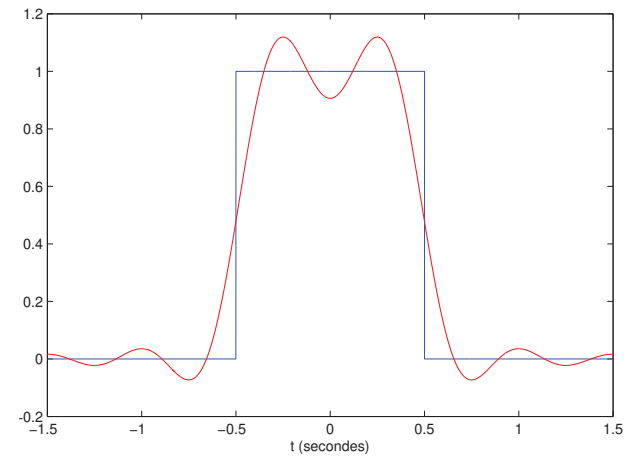
- Signal porte sur  $[-0.5, 0.5]$  : énergie finie OK
- On va essayer de reconstruire ce signal avec des sinusoides de différentes fréquences fondamentales.

## Exemple : Signal porte



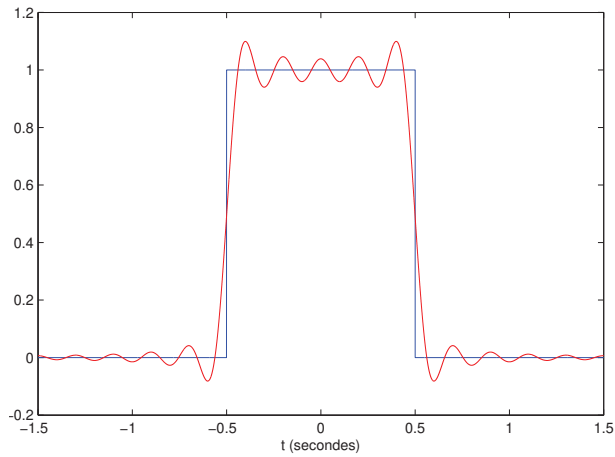
Contributions des sinusoides ayant des fréquences fondamentales  $f \in [0, 1]$  Hz

## Exemple : Signal porte



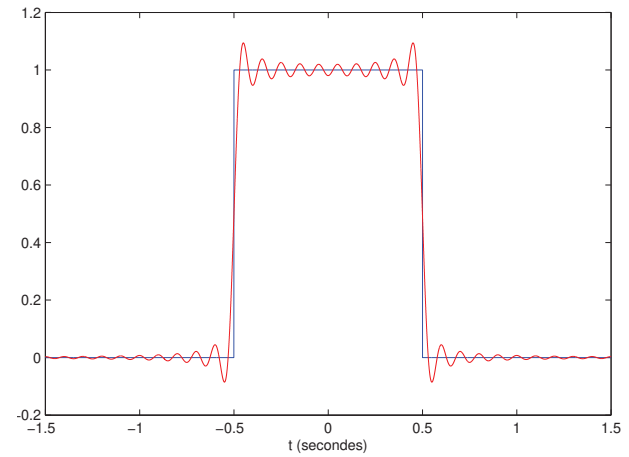
Contributions des sinusoides ayant des fréquences fondamentales  $f \in [0, 3]$  Hz

## Exemple : Signal porte



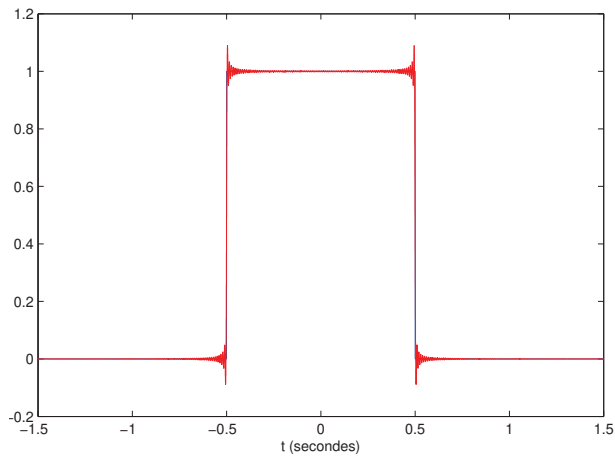
Contributions des sinusoides ayant des fréquences fondamentales  $f \in [0, 5]$  Hz

## Exemple : Signal porte



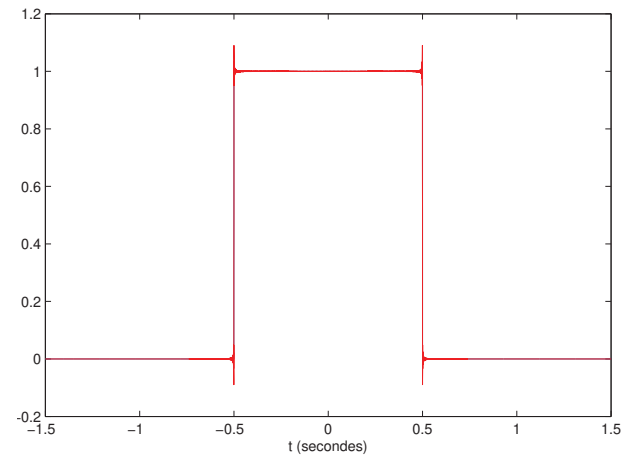
Contributions des sinusoides ayant des fréquences fondamentales  $f \in [0, 10]$  Hz

## Exemple : Signal porte



Contributions des sinusoides ayant des fréquences fondamentales  $f \in [0, 100]$  Hz

## Exemple : Signal porte



Contributions des sinusoides ayant des fréquences fondamentales  $f \in [0, 1000]$  Hz

## Autre écriture

Pour simplifier les calculs, nous allons réécrire cette somme infinie de sinusoides

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} A(f) \sin(2\pi ft + \phi(f)) df &= \int_0^{+\infty} A(f) \cos(2\pi ft + \theta(f)) df \text{ avec } \theta(f) = \phi(f) - \frac{\pi}{2} \\ &= \int_0^{+\infty} A(f) \left[ \frac{e^{j2\pi ft + j\theta(f)} + e^{-j2\pi ft - j\theta(f)}}{2} \right] df \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} A(f) e^{j\theta(f)} e^{j2\pi ft} df + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} A(f) e^{-j\theta(f)} e^{-j2\pi ft} df \end{aligned}$$

Si l'on note  $B(f) = \frac{A(f)e^{j\theta(f)}}{2}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} A(f) \sin(2\pi ft + \phi(f)) df &= \int_0^{+\infty} B(f) e^{j2\pi ft} df + \int_0^{+\infty} B^*(f) e^{-j2\pi ft} df \\ &= \int_0^{+\infty} B(f) e^{j2\pi ft} df + \int_{-\infty}^0 B^*(-f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

Avec ce changement de variable, on voit apparaître des fréquences négatives (qui n'ont pas de sens physique mais simplifient le calcul)

## Sommaire

# Transformée de Fourier continue

- 2.1 Définition et interprétation
- 2.2 Propriétés de la transformée de Fourier
- 2.3 Quelques transformées de Fourier usuelles
- 2.4 Liens entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel
- 2.5 Energies et théorème de Parseval

## Autre écriture

Si l'on note  $X(f) = \begin{cases} B(f) & \text{si } f \geq 0 \\ B^*(-f) & \text{sinon} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} A(f) \sin(2\pi ft + \phi(f)) df &= \int_0^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df + \int_{-\infty}^0 X(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned}$$

Liens entre les deux expressions :

- ▶ On est passé d'une somme sur les fréquences positives à une somme sur toutes les fréquences
- ▶ On est passé de deux coefficients réels  $A(f)$  et  $\phi(f)$  à un seul coefficient  $X(f)$  complexe
- ▶ On est passé d'une somme de sinusoides réelles de fréquences fondamentales  $f$  à une somme d'exponentielles complexes de fréquences fondamentales  $f$
- ▶ MAIS : notre signal est toujours réel ! Les quantités complexes introduites ici servent juste à simplifier les calculs

## Définition

- ▶ Étant donné un signal  $x(t)$  réel, suffisamment régulier et d'énergie finie, on appelle transformée de Fourier et on note  $X(f)$ , la fonction vérifiant :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- ▶ Cette fonction se calcule de façon explicite grâce à la formule :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

## Interprétation : transformée de Fourier inverse

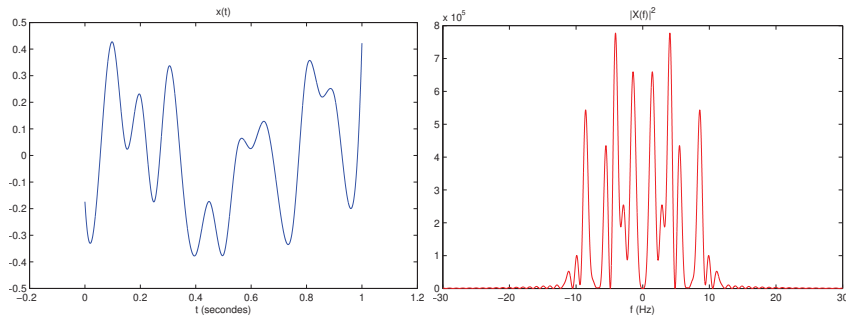
$$\mathcal{TF}^{-1}\{X(f)\} = x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{transformée de Fourier inverse}$$

- ▶  $X(f)$  est une quantité complexe, qui rend compte de la contribution de la sinusoïde de fréquence fondamentale  $f$  dans le signal  $x(t)$

$$X(f) = \begin{cases} \frac{A(f)e^{j\theta(f)}}{2} & \text{si } f \geq 0 \\ \frac{A(-f)e^{-j\theta(-f)}}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ Le module  $|X(f)|$  est lié à l'amplitude de la sinusoïde de fréquence fondamentale  $f$  dans la décomposition de  $x(t)$  comme une somme infinie de sinusoïdes. Si cette quantité est élevée, c'est que la sinusoïde de fréquence fondamentale  $f$  a une place importante dans la décomposition de  $x(t)$ .
- ▶ L'argument  $\arg\{X(f)\}$  est lié au déphasage de la sinusoïde de fréquence fondamentale  $f$  dans la décomposition de  $x(t)$  comme une somme infinie de sinusoïdes.
- ▶ Seules les fréquences positives ont un vrai sens physique

## Interprétation d'un spectre



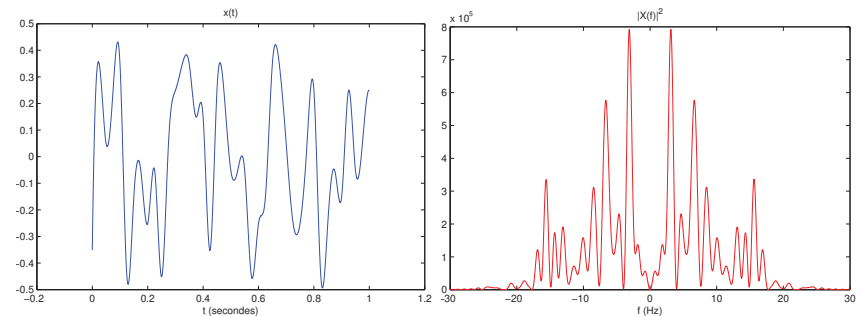
Signal lent : le module au carré  $|X(f)|^2$  est élevé dans les basses fréquences  
Les sinusoïdes de basses fréquences fondamentales contribuent plus que les autres

## Interprétation : transformée de Fourier

$$\mathcal{TF}\{x(t)\} = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{transformée de Fourier}$$

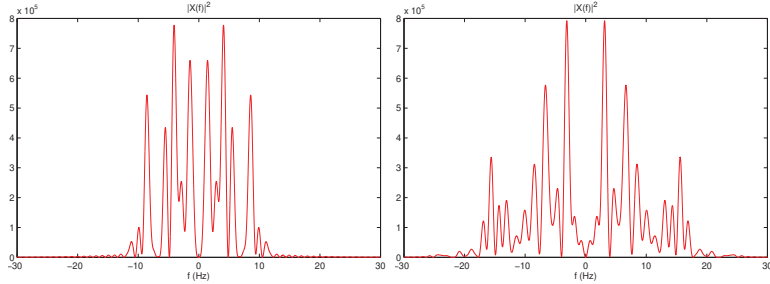
- ▶ Pour calculer la transformée de Fourier, il faut pouvoir observer  $x(t)$  sur l'ensemble des temps possibles, ce qui n'est souvent pas possible en pratique.
- ▶ Même si  $x(t)$  est réel, la quantité  $X(f)$  est a priori complexe. Pour visualiser cette quantité on représente en général le module au carré  $|X(f)|^2$ , appelé aussi spectre.
- ▶ Nous verrons que la transformée de Fourier peut être définie également pour des signaux  $x(t)$  ne vérifiant pas les conditions énoncées précédemment. En particulier, elle s'étend parfaitement aux signaux  $x(t)$  complexes et à certains signaux périodiques à puissance finie.

## Interprétation d'un spectre



Signal plus rapide : le module au carré  $|X(f)|^2$  est élevé aussi dans les fréquences plus élevées  
Les sinusoïdes de plus hautes fréquences fondamentales contribuent aussi

## Notion de largeur de bande



- ▶ Si on compare ces deux spectres, on voit que les valeurs élevées sont comprises entre  $-10$  Hz et  $10$  Hz pour le premier, et entre  $-20$  Hz et  $20$  Hz pour le second
- ▶ De la même façon que l'on avait défini la notion de support temporel, on peut définir ici un support fréquentiel.

## Propriétés de la transformée de Fourier

- ▶ Avant de commencer à calculer des transformées de Fourier, nous allons établir quelques propriétés importantes pour notre étude (et qui vont simplifier grandement nos calculs!)
- ▶ Propriétés élémentaires :
  - ▶ Linéarité
  - ▶ Produit
  - ▶ Produit de convolution
  - ▶ Translation
  - ▶ Modulation

## Notion de largeur de bande

- ▶ On appelle **largeur de bande** d'un signal et on note  $B = [f_{min}, f_{max}]$  avec  $f_{min} \geq 0$  et  $f_{max} \geq 0$  la plage de fréquences qu'un signal occupe.
- ▶ Dans notre exemple, on a :

$$B_1 = 0 - 10 \text{ Hz} \quad B_2 = 0 - 20 \text{ Hz}$$

- ▶ Attention, pour déterminer la largeur de bande, il ne faut considérer que les fréquences positives !
- ▶ Dans le cas où  $f_{min} = 0$  on dit que le signal est en **bande de base**, et on note plus simplement  $B = f_{max}$
- ▶ Dans notre exemple, on écrirait plus simplement  $B_1 = 10$  Hz et  $B_2 = 20$  Hz

## Linéarité de la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{\lambda x(t) + \mu y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda x(t) + \mu y(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lambda \mathcal{TF}\{x(t)\} + \mu \mathcal{TF}\{y(t)\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\{\lambda x(t) + \mu y(t)\} = \lambda \mathcal{TF}\{x(t)\} + \mu \mathcal{TF}\{y(t)\}}$$

## Linéarité de la transformée de Fourier inverse

De la même façon, on pourrait prouver que la transformée de Fourier inverse est aussi linéaire :

$$\mathcal{TF}^{-1}\{\lambda X(f) + \mu Y(f)\} = \lambda \mathcal{TF}^{-1}\{X(f)\} + \mu \mathcal{TF}^{-1}\{Y(f)\}$$

## Produit de convolution

De la même façon, on pourrait prouver que :

$$\mathcal{TF}\{x(t) * y(t)\} = \mathcal{TF}\{x(t)\} \times \mathcal{TF}\{y(t)\}$$

- ▶ Cette propriété est absolument fondamentale en traitement du signal : nous la retrouverons quand nous aborderons le filtrage dans le domaine fréquentiel.
- ▶ Démonstration en TD4

## Produit

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{x(t)y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X(f')e^{j2\pi f' t} df' \right] y(t)e^{-j2\pi ft} dt && \text{transformée de Fourier inverse} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f')y(t)e^{-j2\pi(f-f')t} df' dt && \text{développement} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f') \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-f')t} dt \right] df' && \text{regroupement des termes} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f')Y(f-f')df' && \text{dépendant de } t \\ &= (X * Y)(f) \end{aligned}$$

$$\mathcal{TF}\{x(t)y(t)\} = \mathcal{TF}\{x(t)\} * \mathcal{TF}\{y(t)\}$$

## Translation

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi f(t'+t_0)} dt' && \text{changement de variable} \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi ft'} dt' && t' = t - t_0 \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \mathcal{TF}\{x(t)\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{TF}\{x(t-t_0)\} = e^{-j2\pi ft_0} \mathcal{TF}\{x(t)\}$$

## Translation

- ▶ D'après la propriété précédente, on voit que :

$$|\mathcal{TF}\{x(t - t_0)\}|^2 = |\mathcal{TF}\{x(t)\}|^2$$

- ▶ En tradatant un signal temporellement, on ne change pas son spectre (mais uniquement sa phase)
- ▶ Cette propriété peut être utile pour simplifier certains calculs

## Transformées de Fourier usuelles

- ▶ Nous allons dans cette partie définir la transformée de Fourier pour des signaux qui ne sont pas nécessairement à énergie finie, donc pour lesquels la transformée de Fourier n'est pas définie proprement
- ▶ Pour ces signaux il faudra faire attention en manipulant les objets, et notamment, si la transformée de Fourier  $X(f)$  comporte des dirac, on ne pourra pas tracer la quantité  $|X(f)|^2$  : dans ce cas on définira le spectre comme  $|X(f)|$ , où on tracera directement  $X(f)$  en distinguant sa partie réelle et sa partie imaginaire.
- ▶ Nous reviendrons sur ces notions dans le cours de Théorie du Signal

## Modulation

De la même façon, on pourrait prouver que :

$$\mathcal{TF}\{e^{j2\pi f_0 t} x(t)\} = X(f - f_0)$$

- ▶ On appelle **modulation** une telle opération (multiplication par une exponentielle complexe)
- ▶ Attention, le signe dans l'exponentielle complexe n'est pas le même que pour la translation !
- ▶ Démonstration en TD4

## Dirac



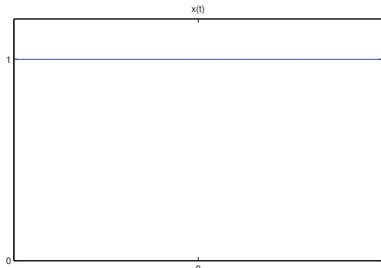
$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f \times 0} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{TF}\{\delta(t)\} = 1$$

Ce *signal*, très localisé dans le domaine temporel, a une largeur de bande infinie



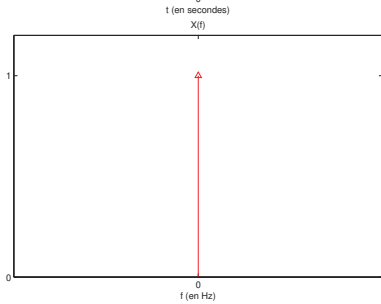
## Constante



$$\begin{aligned} \mathcal{TF}^{-1}\{\delta(f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= e^{j2\pi 0 \times t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\{1\} = \delta(f)}$$

Ce signal, ayant un support temporel infini, est très localisé dans le domaine fréquentiel



## Dirac translaté - Exponentielle complexe

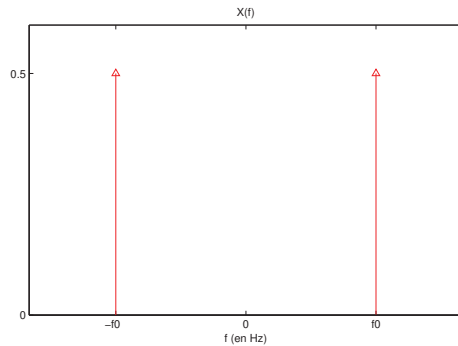
Grâce aux propriétés démontrées dans la partie précédente, on sait que :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{\delta(t - t_0)\} &= e^{-j2\pi ft_0} \mathcal{TF}\{\delta(t)\} \\ &= \boxed{e^{-j2\pi ft_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{e^{j2\pi f_0 t}\} &= \mathcal{TF}\{e^{j2\pi f_0 t} \times 1\} \\ &= \boxed{\delta(f - f_0)} \end{aligned}$$

Au passage on peut remarquer que, même si la fonction  $e^{j2\pi f_0 t}$  n'est ni d'énergie finie ni réelle, il est néanmoins possible de définir sa transformée de Fourier.

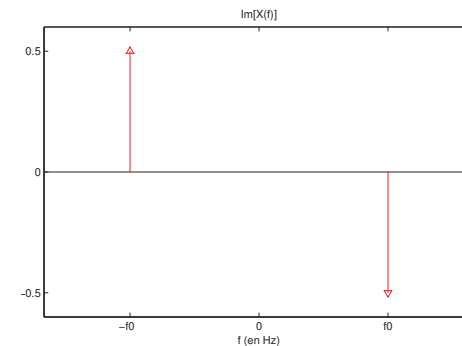
## Cosinus



En utilisant la formule d'Euler on peut définir et calculer la transformée de Fourier de la fonction cosinus :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{\cos(2\pi f_0 t)\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{TF}\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \mathcal{TF}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} \right] \\ &= \boxed{\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}} \end{aligned}$$

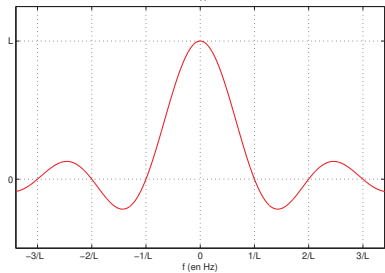
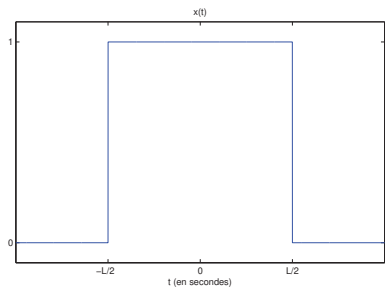
## Sinus



De la même façon, on peut définir et calculer la transformée de Fourier de la fonction sinus :

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}\{\sin(2\pi f_0 t)\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right\} \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \mathcal{TF}\{e^{j2\pi f_0 t}\} - \mathcal{TF}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} \right] \\ &= \boxed{\frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}} \end{aligned}$$

## Fonction porte



Laurent Oudre

$$\begin{aligned}
 \mathcal{TF}\{\Pi_L(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_L(t)e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \left[ \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \\
 &= \frac{1}{-j2\pi f} [e^{-j\pi fL} - e^{j\pi fL}] \\
 &= \frac{1}{\pi f} \times \frac{e^{j\pi fL} - e^{-j\pi fL}}{2j} \\
 &= \frac{1}{\pi f} \times \sin(\pi fL) \\
 &= L \times \frac{\sin(\pi fL)}{\pi fL} \\
 &= \boxed{L \operatorname{sinc}(Lf)}
 \end{aligned}$$

## Principe

- Intuitivement,  $x(t)$  et  $X(f)$  sont juste deux représentations du même signal, il existe donc des liens très forts entre un signal et sa transformée de Fourier. Nous avons en particulier déjà vu que :

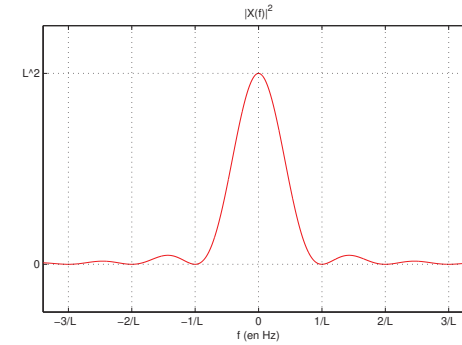
Produit dans le domaine temporel  $\Leftrightarrow$  Produit de convolution dans le domaine fréquentiel

Produit de convolution dans le domaine temporel  $\Leftrightarrow$  Produit dans le domaine fréquentiel

Translation dans le domaine temporel  $\Leftrightarrow$  Modulation dans le domaine fréquentiel

Modulation dans le domaine temporel  $\Leftrightarrow$  Translation dans le domaine fréquentiel

## Fonction porte



- La largeur de bande de la fonction porte est en théorie infinie, mais si l'on trace le module au carré de la transformée de Fourier, on voit que la majorité des intensités se situe dans l'intervalle  $[-\frac{1}{L}, +\frac{1}{L}]$
- En première approximation on peut donc utiliser  $B \approx \frac{1}{L}$  (on utilise ici la notation de la bande de base)
- Plus ce signal a un support temporel important ( $L$  grand), plus sa largeur de bande est petite (et inversement).

Laurent Oudre

## Cas d'un signal réel

Si le signal  $x(t)$  est réel, comment cela influence-t-il sa transformée de Fourier ?

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x^*(t) \\
 &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \right]^* \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)e^{-j2\pi ft} df \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(-f')e^{j2\pi f' t} df'
 \end{aligned}$$

Par unicité de la transformée de Fourier, on a donc :

$$x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(f) = X^*(-f)$$

$$x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(-f) = X^*(f)$$

## Cas d'un signal réel

$$x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X(-f) = X^*(f)$$

Ceci implique que :

- ▶ Le module de la transformée de Fourier d'un signal réel est une fonction paire :

$$|X(-f)| = |X(f)|$$

- ▶ L'argument de la transformée de Fourier d'un signal réel est une fonction impaire :

$$\arg \{X(-f)\} = -\arg \{X(f)\}$$

Si le signal est réel, il suffit donc d'observer la transformée de Fourier sur les fréquences positives (qui ont un sens physique). On peut reconstruire ce qui se passe pour les fréquences négatives par symétrie hermitienne (module pair, argument impair).

## Sommaire

### Transformée de Fourier discrète

- 3.1 Retour sur le critère de Nyquist
- 3.2 Définition
- 3.3 Limites de la transformée de Fourier discrète

## Théorème de Parseval

- ▶ On peut démontrer que, pour un signal à énergie finie, son énergie dans le domaine temporel est la même que celle dans le domaine fréquentiel

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- ▶ L'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.

## Principe

- ▶ Nous avons défini la transformée de Fourier pour un signal analogique  $x(t)$
- ▶ Peut-on étendre cette définition pour un signal numérique  $x[n]$  échantillonné (et quantifié) ?
- ▶ Nous avons vu que la transformée de Fourier  $X(f)$  était une fonction continue de la fréquence  $f$  : comment faire pour la calculer et la stocker (par exemple avec MATLAB) pour un signal numérique ?

## Critère de Nyquist (rappel)

- ▶ Etant donnée une sinusoïde de fréquence fondamentale  $f_0$  que l'on souhaite échantillonner à une fréquence d'échantillonnage  $F_e$ , on a vu que :
  - ▶ Si  $F_e > 2f_0$ , on est capable de reconstruire parfaitement la sinusoïde à partir des échantillons
  - ▶ Si  $F_e = 2f_0$ , tous les échantillons sont à 0 et il est impossible de reconstruire la sinusoïde
  - ▶ Si  $F_e < 2f_0$ , une sinusoïde avec une autre fréquence fondamentale semble apparaître après reconstruction : il est impossible de reconstruire la sinusoïde
- ▶ Critère de Nyquist : Pour reconstruire parfaitement après échantillonnage une sinusoïde de fréquence fondamentale  $f_0$ , il faut :

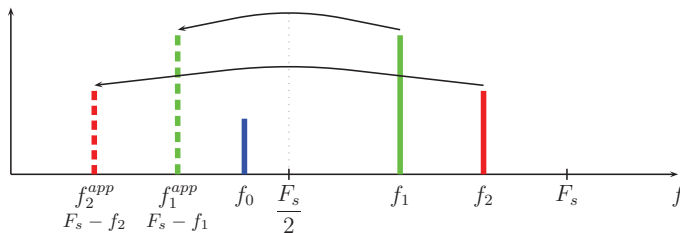
$$F_e > 2f_0$$

- ▶ Et pour un signal quelconque ?

## Repliement de spectre

Que se passe-t-il si la condition de Nyquist n'est pas vérifiée ?

- ▶ Toutes les composantes du signal de fréquences  $f$  au dessus de la fréquence de Nyquist vont faire apparaître des fréquences apparentes dans l'intervalle  $[0, \frac{F_e}{2}]$
- ▶ On appelle ce phénomène le **repliement de spectre**.



## Critère de Nyquist

- ▶ Considérons un signal  $x(t)$  de largeur de bande  $B = [f_{min}, f_{max}]$  : dans quel cas pourra-t-on l'échantillonner sans détruire de l'information ?
- ▶ Nous avons vu qu'un signal pouvait être décomposé en une infinité de sinusoïdes
- ▶ Pour que le signal  $x(t)$  vérifie le critère de Nyquist il faut donc que toutes les sinusoïdes composant le signal vérifient la critère de Nyquist !

$$\forall f \in [f_{min}, f_{max}], \quad F_e > 2f$$

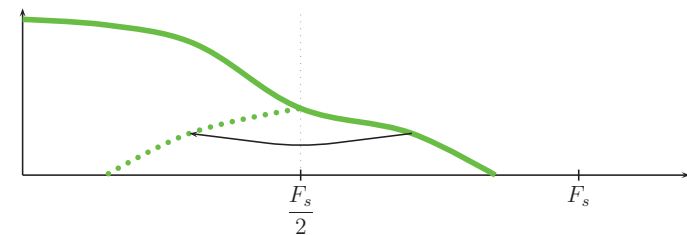
- ▶ Ce qui se résume de la façon suivante :

$$F_e > 2f_{max}$$

- ▶ Remarques :
  - ▶ En bande de base ( $f_{min} = 0$ ), on note  $B = f_{max}$  donc le critère de Nyquist s'écrit  $F_e > 2B$
  - ▶ Si  $f_{max} = +\infty$  il est impossible de respecter scrupuleusement le critère de Nyquist

## Repliement de spectre

- ▶ Pourquoi *repliement* ? Car c'est comme si l'on pliait une feuille de papier :



- ▶ On perturbe le contenu fréquentiel avec des fréquences parasites
- ▶ Solution : avant l'échantillonnage, si on sait que  $f_{max} \geq \frac{F_e}{2}$ , on fait un filtrage (filtre anti-repliement) pour enlever les fréquences supérieures à  $\frac{F_e}{2}$ . Ces fréquences sont définitivement perdues, mais au moins, l'information dans la bande  $[0, \frac{F_e}{2}]$  est préservée.

## Signal numérique

- ▶ Nous avons déjà vu comment calculer la transformée de Fourier continue pour un signal analogique  $x(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- ▶ Supposons que l'on échantillonne le signal avec une fréquence d'échantillonnage  $F_e$ , on a  $x[n] = x\left(\frac{n}{F_e}\right)$  et cette expression devient :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{F_e}\right) e^{-j2\pi f \frac{n}{F_e}}$$

- ▶ On appelle cette transformée la transformée de Fourier à temps discret (TFTD)
- ▶ Problème :
  - ▶ En pratique on a accès uniquement à un nombre fini d'échantillons  $n = 0 \dots N - 1$
  - ▶ Si l'on veut calculer ceci avec MATLAB, on ne pourra pas calculer  $X(f)$  pour toutes les fréquences, il va falloir choisir un nombre fini de fréquences pour lesquelles calculer  $X(f)$

## Transformée de Fourier discrète

- ▶ Etant donné  $N$  échantillons  $x_0, \dots, x_{N-1}$ , on définit un ensemble de  $N$  fréquences  $f[k]$  et on calcule :

$$X(f[k]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f[k] \frac{n}{F_e}}$$

- ▶ En pratique, on choisit souvent :

$$f[k] = k \frac{F_e}{N} \text{ pour } 0 \leq k \leq N - 1$$

- ▶ La transformée de Fourier discrète s'écrit finalement :

$$X[k] = X(f[k]) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \text{ pour } 0 \leq k \leq N - 1$$

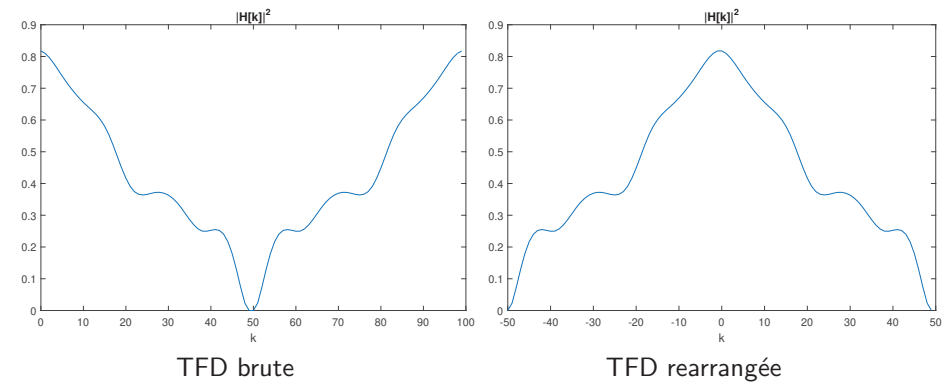
## Transformée de Fourier discrète

- ▶ Remarque : la transformée de Fourier discrète (TFD) est  $N$ -périodique :

$$\begin{aligned} X[k + N] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{(k+N)n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N} - j2\pi n} \\ &= X[k] \end{aligned}$$

- ▶ En particulier, les fréquences  $f[k] = k \frac{F_e}{N}$  avec  $k > \frac{N}{2}$  ne vérifient pas la condition de Nyquist, donc ne devraient pas être observables
- ▶ En réalité, elles correspondent aux fréquences  $f[k - N] = k \frac{F_e}{N} - F_e$  qui sont comprises entre  $-\frac{F_e}{2}$  et 0
- ▶ En général, sous MATLAB, on préfère observer le spectre sur  $[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}]$  qui a plus de sens physique

## Transformée de Fourier discrète : MATLAB



## Transformée de Fourier inverse discrète

- ▶ On peut également définir une transformée de Fourier inverse discrète

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{kn}{N}}$$

- ▶ Le coefficient  $\frac{1}{N}$  permet d'obtenir une reconstruction exacte, il s'agit juste d'une convention. En particulier, certains mettent ce coefficient dans la transformée de Fourier discrète, ou alors  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  sur les deux transformées.
- ▶ La convention présentée ici est celle utilisé sous MATLAB

## Cas d'une sinusoïde

- ▶ Supposons qu'on étudie une sinusoïde de fréquence fondamentale  $f_0$  échantillonnée à  $F_e$  Hz (avec  $f_0 < \frac{F_e}{2}$ )
- ▶ Deux cas peuvent arriver :
  - ▶ Si il existe  $k'$  tel que  $f_0 = k' \frac{F_e}{N}$  alors la fréquence  $f_0$  est observable dans la TFD, et on a un pic à  $f = f_0$  et  $f = -f_0$
  - ▶ Si ce n'est pas le cas, alors au lieu d'avoir deux pics bien nets, on a des zones élevées autour de  $f = f_0$  et  $f = -f_0$ , mais il est difficile de savoir précisément où se situe la fréquence fondamentale de la sinusoïde.

## Résolution en fréquence

- ▶ Nous avons vu qu'au lieu d'estimer la transformée de Fourier  $X(f)$  pour toutes les fréquences, on n'observait dans le contexte de la transformée de Fourier discrète qu'un ensemble de  $N$  fréquences :

$$f[k] = k \frac{F_e}{N} \text{ pour } 0 \leq k \leq N - 1$$

- ▶ L'espace entre deux fréquences observables est appelée *résolution en fréquence* :

$$\Delta f = \frac{F_e}{N}$$

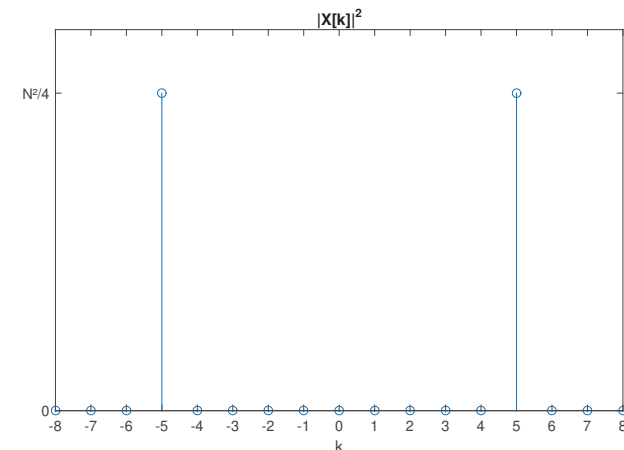
où  $F_e$  est la fréquence d'échantillonnage, et  $N$  le nombre d'échantillons du signal qu'on analyse.

- ▶ Si on note  $d$  la durée (en secondes) du signal qu'on observe, on a  $N = d \times F_e$ , et on a donc

$$\Delta f = \frac{1}{d}$$

- ▶ Plus on observe un signal sur une longue durée, plus l'on augmente la précision dans le domaine fréquentiel

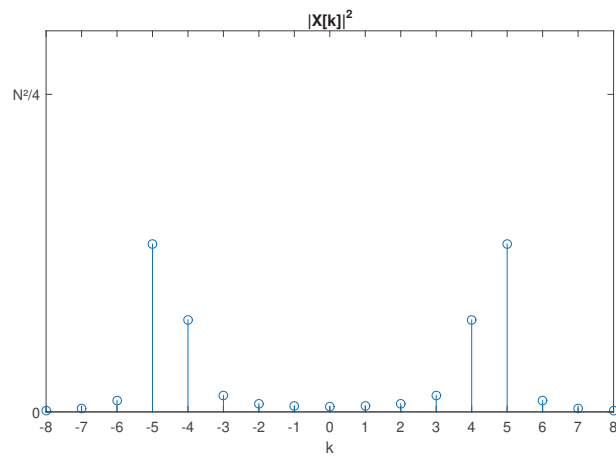
## Cas d'une sinusoïde



**Cas 1 : il existe  $k'$  tel que  $f_0 = k' \frac{F_e}{N}$**

Ici  $f_0 = 5$  Hz,  $F_e = 100$  Hz,  $N = 100$  échantillons, donc  $\Delta f = \frac{F_e}{N} = 1$  Hz  
En observant la figure, on retrouve directement  $f_0$

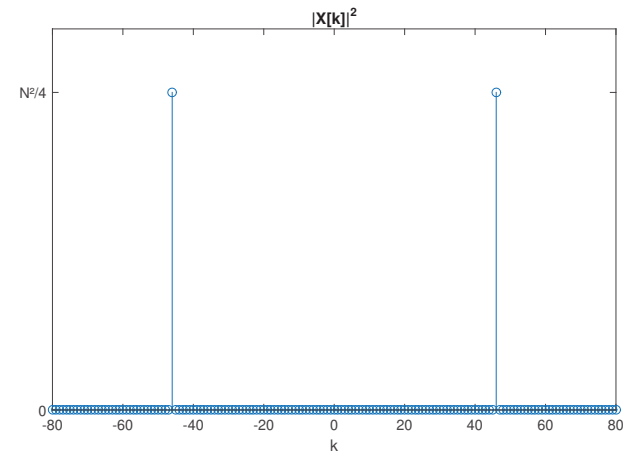
## Cas d'une sinusoïde

**Cas 2 :  $f_0$  quelconque**

Ici  $f_0 = 4.6$  Hz,  $F_e = 100$  Hz,  $N = 100$  échantillons, donc  $\Delta f = \frac{F_e}{N} = 1$  Hz

En observant la figure, on voit que  $f_0$  est comprise entre 4 et 5 Hz, mais difficile d'en dire plus...

## Cas d'une sinusoïde



Si on prend 10 fois plus d'échantillons, alors on se replace dans le cas 1, et il est possible d'estimer  $f_0$  de façon précise

Ici  $f_0 = 4.6$  Hz,  $F_e = 100$  Hz,  $N = 1000$  échantillons, donc  $\Delta f = \frac{F_e}{N} = 0.1$  Hz