Introduction au traitement du signal

Cours 2 : Conversion analogique/numérique

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année
2019-2020

Sommaire

Sommaire

Signaux analogiques - signaux numériques

Signal analogique

- Nous avons vu que la plupart des signaux du monde réel (ondes, son, électricité, etc...) sont continus et ne peuvent pas être stockés et analysés sur un ordinateur.
- Pourquoi cela ? Prenons l'exemple d'un son d'une durée de 5 secondes et correspondant à la note *la* (celui du diapason).

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \qquad t \in [0, 5[\text{ avec } f_0 = 440 \text{ Hz}$$

  - Le nombre de temps pour lequel le signal est défini est infini ! (même si le support temporel est ici borné)
  - Les valeurs du signal sont réelles et contiennent une infinité de décimales
    Ex : x(0.001) = 0.368124552684678...
- Tout ici est infini : le nombre de valeurs à stocker, mais aussi les valeurs elles-mêmes. On appelle un tel signal un **signal analogique**

Signal numérique

- Pour qu'un signal puisse être stocké sur un ordinateur il faut :
  - Que le nombre d'échantillons qu'il contient soit fini : le signal doit être discret et à support temporel fini
  - Que le nombre de possibilités pour les valeurs du signal soit fini : chaque valeur du signal doit pouvoir être codée sur un nombre fini de bits
- Il faut donc un nombre fini de valeurs à stocker et un nombre fini de valeurs possibles. On appelle un tel signal un **signal numérique**

Conversion analogique/numérique

Pour pouvoir convertir un signal analogique en un signal numérique, il faut :

- **Échantillonnage.** Choisir un ensemble fini de N temps $t[n]$ où l'on va stocker les valeurs (conversion continu vers discret).

$$x[n] = x(t[n]) \text{ où } t[n] \text{ représentent les temps où le signal va être enregistré}$$

$$n \in [\![0, N-1]\!]$$

- **Quantification.** Choisir un ensemble fini de valeurs possibles et stocker en mémoire la valeur la plus proche de la valeur observée.

Exemple

Supposons qu'on veuille stocker en mémoire le signal analogique suivant :

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \qquad t \in [0, 5[\text{ avec } f_0 = 440 \text{ Hz}$$

1. On va uniquement observer le signal à des instants $t[n]$. On prend une valeur toutes les 10^{-3} secondes.

$$t[n] = 10^{-3} n \qquad n \in [\![0, 4999]\!] \rightarrow 5000 \text{ échantillons}$$

2. On va coder chaque valeur $x[n] = x(t[n])$ sur 4 bits. Comme on sait que les valeurs sont comprises entre -1 et 1, on définit $2^4 = 16$ valeurs possibles de la façon suivante :$-\frac{15}{16}, -\frac{13}{16}, \ldots, -\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{15}{16}$. Chaque valeur est associée à un code binaire comportant 4 bits.

$$x[10] = x\left(10 \times 10^{-3}\right) = x(0.01) = 0.587785252292471... \rightarrow 0.5625 \rightarrow 1101$$

3. En tout, ce signal sera représenté numériquement sur

$$5000 \times 4 = 20000 \text{ bits} \approx 2.44 \text{ Ko}$$

Conversion analogique/numérique

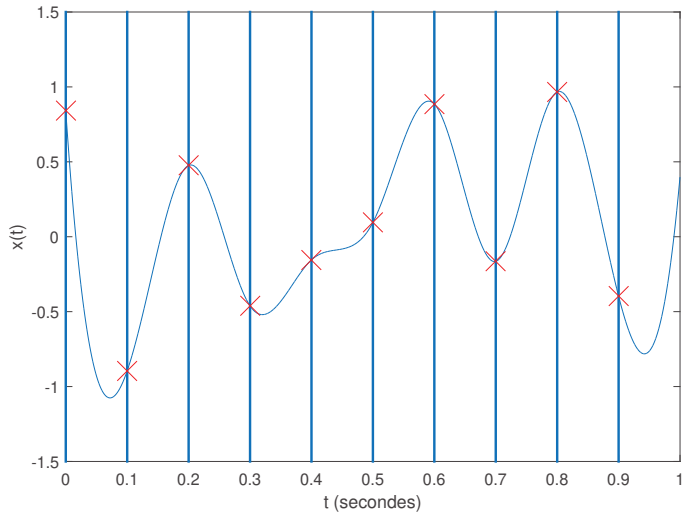
Bilan :

- En entrée, un signal analogique physique du monde réel
- En sortie, après échantillonnage et quantification, un vecteur binaire composé de 0 et 1 stockable et analysable par ordinateur

Exemples :

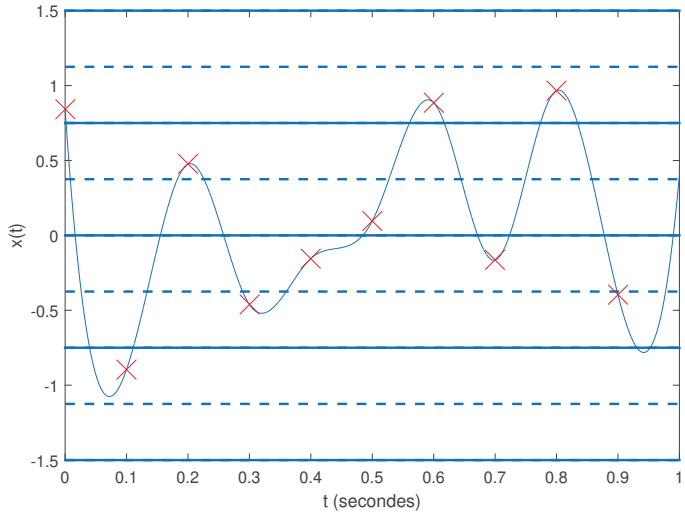
- Enregistrement d'un son
- Enregistrement d'une photo numérique

Conversion analogique/numérique



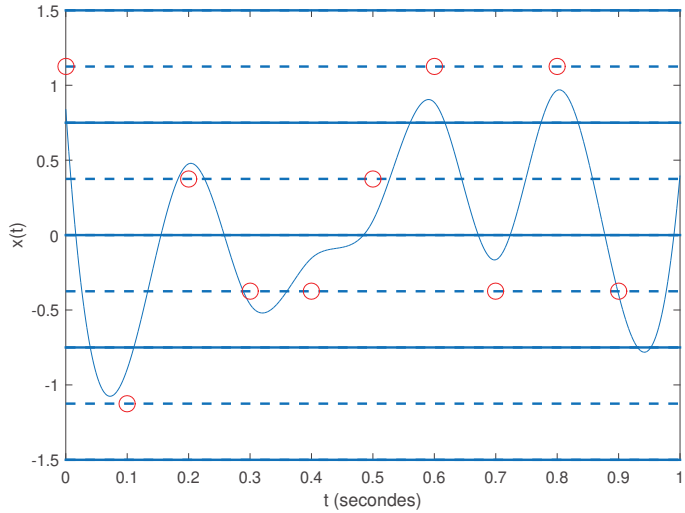
Etape 1 : échantillonnage dans le domaine du temps

Conversion analogique/numérique



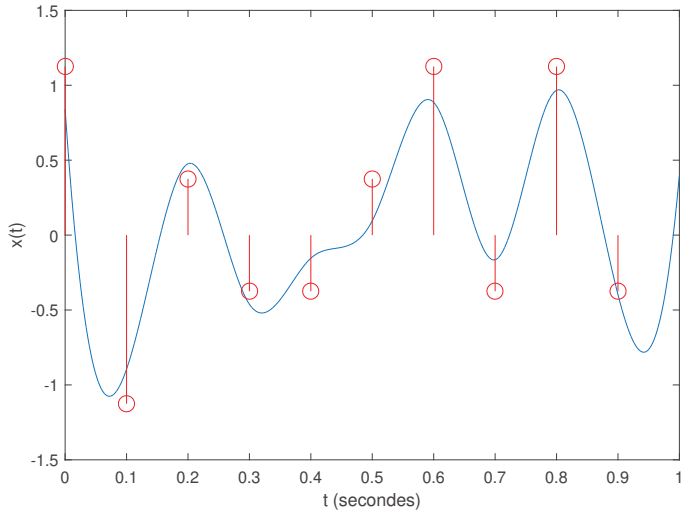
Etape 2 : détermination des intervalles de quantification dans le domaine des amplitudes

Conversion analogique/numérique



Etape 3 : arrondi des échantillons à la valeur quantifiée la plus proche

Conversion analogique/numérique



Bilan des opérations

Sommaire

Échantillonnage

Qu'est-ce que l'échantillonnage ?

- Principe : Convertir un signal continu en un signal discret en ne stockant que ce qui se passe à certains instants $t[n]$

$$\boxed{x[n] = x(t[n])}$$

- On ne va considérer ici que l'échantillonnage uniforme, c'est à dire qu'on prend une valeur toutes les T_e secondes, où T_e est fixe

$$\boxed{t[n] = nT_e = \frac{n}{F_e}}$$

- T_e est appelée la **période d'échantillonnage** (en secondes)
- $\boxed{F_e = \frac{1}{T_e}}$ est appelée la **fréquence d'échantillonnage** (en Hertz)

Attention !

- Attention à ne pas confondre la notion de période/fréquence fondamentale (T_0 et f_0) qui est définie pour un signal périodique et la notion de période/fréquence d'échantillonnage (T_e et F_e) !
- La fréquence d'échantillonnage F_e correspond au nombre d'échantillons qui seront enregistrés en 1 seconde.
- Dans certains cours, on note parfois F_e de façon différente (par exemple f_e, f_s ou F_s). L'indice s correspond au mot *sampling* en anglais qui veut dire *échantillonnage*

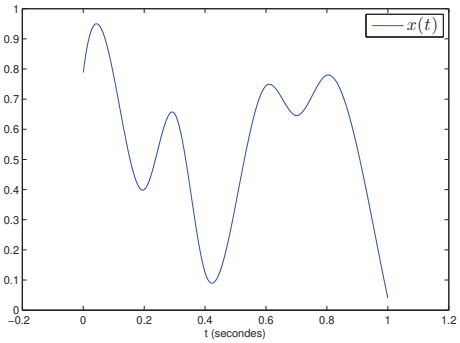
Echantillonnage uniforme

- Si on souhaite échantillonner un signal avec une fréquence d'échantillonnage F_e, on stocke ceci :

Echantillon n	Temps $t[n]$	Valeur stockée $x[n]$
0	0	$x(0)$
1	T_e	$x(T_e)$
2	$2T_e$	$x(2T_e)$
3	$3T_e$	$x(3T_e)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

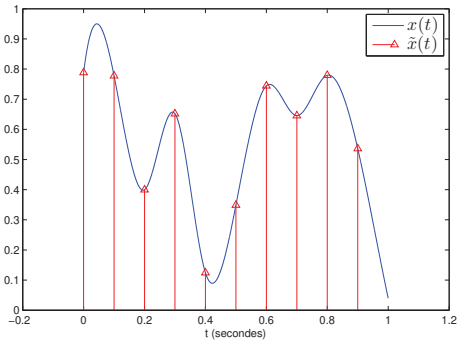
- Moyen mnémotechnique : une seconde de signal correspond à F_e échantillons
- Si on considère un signal d'une durée de d secondes, il faut donc prévoir de stocker $d \times F_e$ échantillons (plus éventuellement les temps correspondant dans un vecteur temps).

Exemple



- Signal continu $x(t)$ défini sur $t \in [0, 1[$

Exemple



- On prend une valeur toutes les 0.1 secondes en commençant par $t = 0$ et en s'arrêtant à $t = 0.9$:
  - $T_e = 0.1$ secondes
  - $F_e = 10$ Hz
- Temps $t[n]$ définis par

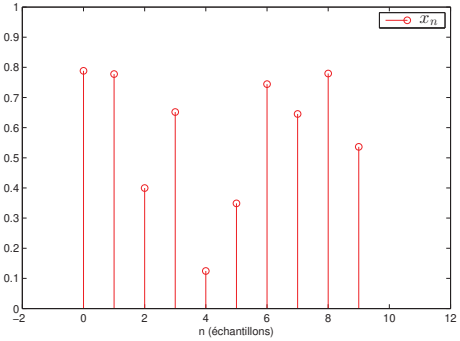
$$t[n] = nT_e = \frac{n}{F_e} \text{ pour } n \in [\![0, 9]\!]$$

$$t_0 = 0, t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \cdots$$

- Le signal continu obtenu peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \sum_{n=0}^{9} x(nT_e)\delta(t - nT_e) \\ &= x(t) \times \sum_{n=0}^{9} \delta(t - nT_e) \end{aligned}$$

Exemple



- On range chaque valeur

$$x(t[n]) = x(nT_e) = x\left(\frac{n}{F_e}\right)$$

dans un vecteur (ou un tableau)
- $x[n] = x(t[n])$ avec $n \in [\![0, 9]\!]$
- Le signal est stocké sur $N = 10$ échantillons

Limites de l'échantillonnage : approche qualitative

- Intuitivement si T_e est trop grand (donc F_e trop petite), on va perdre de l'information.
- En particulier, si le signal $x(t)$ varie très rapidement, si l'on veut garder toute l'information, il va falloir prendre une fréquence d'échantillonnage très élevée
- A l'inverse, si le signal $x(t)$ varie lentement, on n'aura pas besoin de prendre beaucoup de points

$\longrightarrow$ Comment choisir la fréquence d'échantillonnage ?

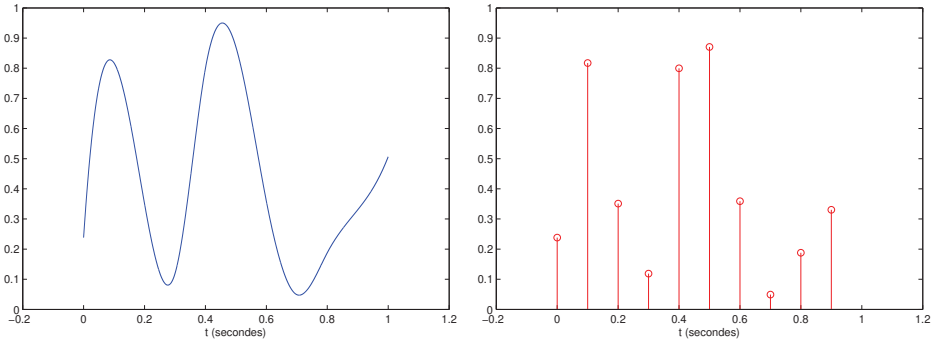
Reconstruction d'un signal échantillonné

Pour tester l'intuition que nous avons sur le choix de la fréquence d'échantillonnage, nous allons considérer l'expérience suivante :

- Prendre un signal continu et l'échantillonner
- Essayer de reconstruire le signal continu à partir des échantillons
- Voir si le signal reconstruit est éloigné ou pas du signal originel

$\longrightarrow$ Si la fréquence d'échantillonnage a été correctement choisie, le signal reconstruit devrait être proche du signal original.

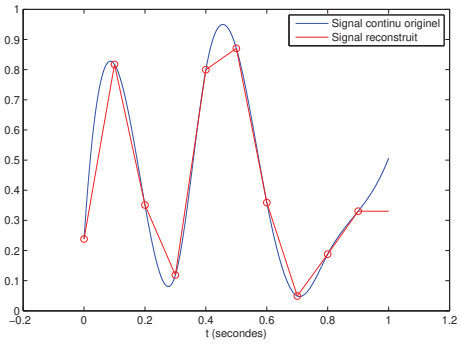
Exemple 1



Le signal étudié ici varie de façon lente. On échantillonne le signal à $F_e = 10$ Hz et on va essayer de reconstruire le signal à partir des seuls échantillons. Comment faire ?

Exemple 1

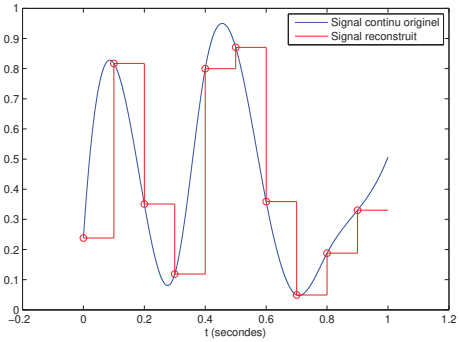
Idée 1 : On va relier les points entre eux ! (Bloqueur d'ordre 1)



Problème : il faut calculer chaque équation de droite et faire des interpolations qui peuvent être coûteuses en temps de calcul

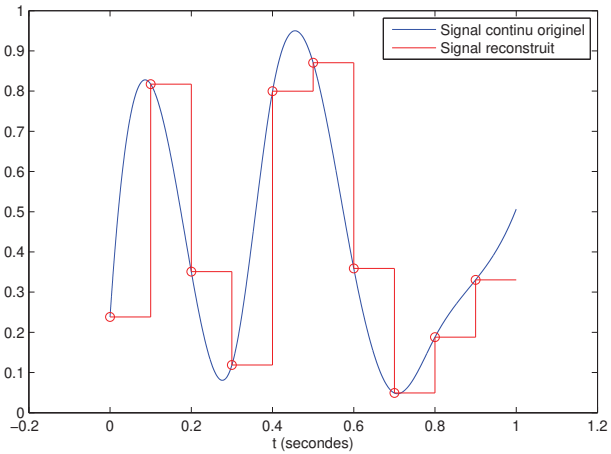
Exemple 1

Idée 2 : On va dire que tant que l'on a pas un nouvel échantillon, le signal reste constant (Bloqueur d'ordre 0)



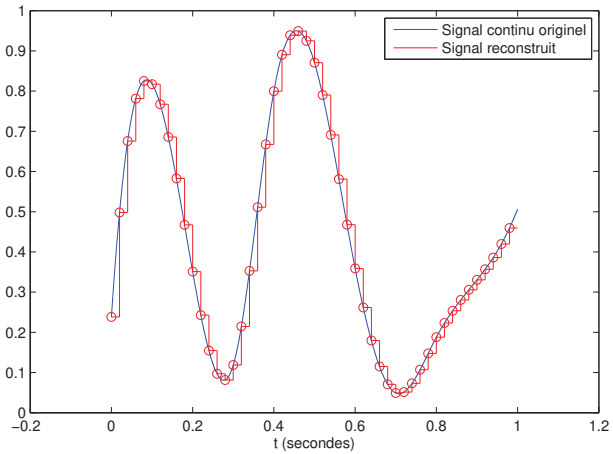
Pas extrêmement précis, mais très facile à implémenter

Exemple 1 : bloqueur d'ordre 0



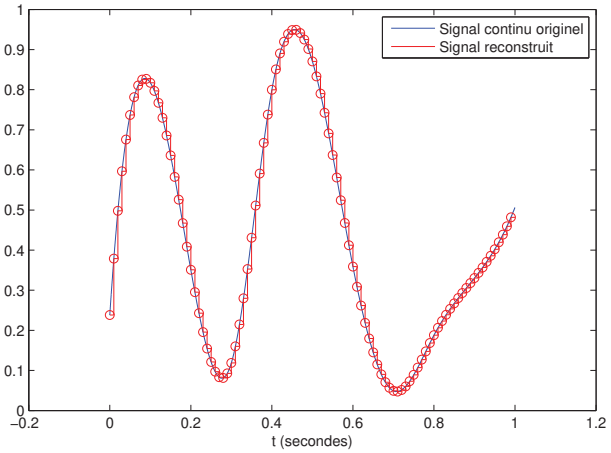
$F_e = 10$ Hz, $T_e = 0.1$ secondes. Reconstruction très grossière.

Exemple 1 : bloqueur d'ordre 0



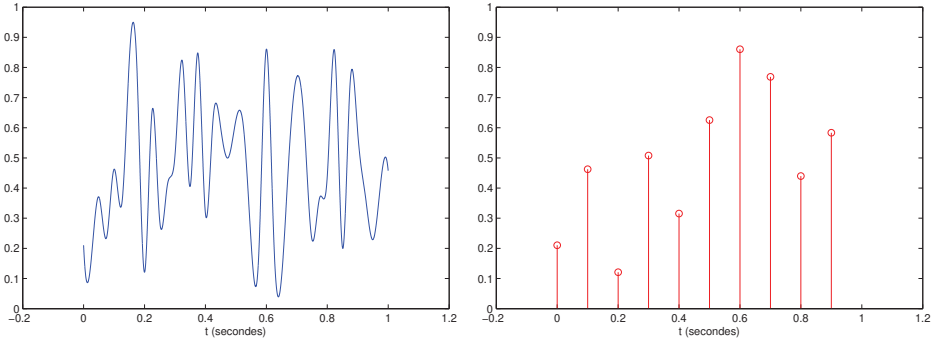
$F_e = 50$ Hz, $T_e = 0.02$ secondes. Reconstruction encore imparfaite.

Exemple 1 : bloqueur d'ordre 0



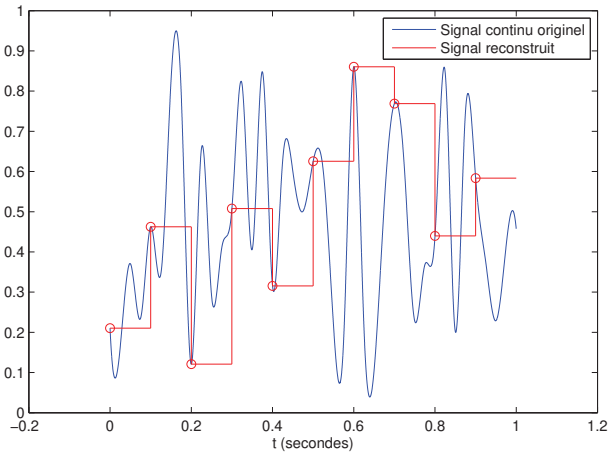
$F_e = 100$ Hz, $T_e = 0.01$ secondes. Reconstruction de qualité très acceptable.

Exemple 2



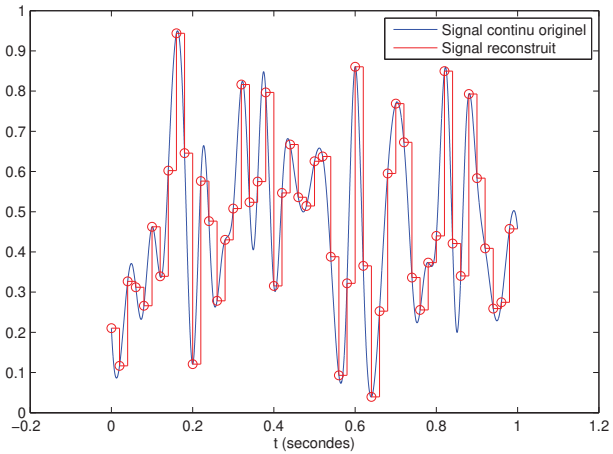
Cette fois-ci le signal étudié ici varie de façon rapide. Cela va-t-il influencer la reconstruction du signal ?

Exemple 2 : bloqueur d'ordre 0



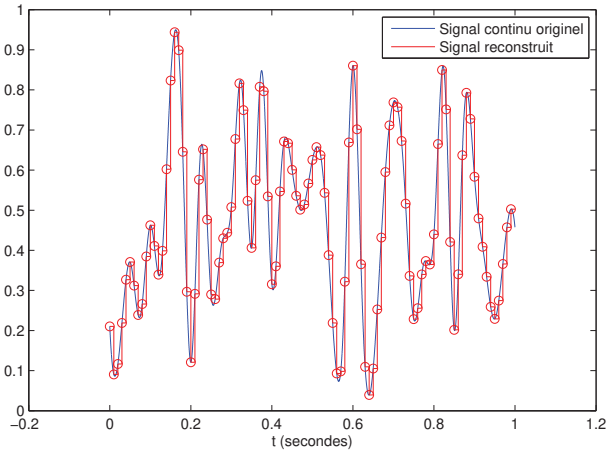
$F_e = 10$ Hz, $T_e = 0.1$ secondes. Reconstruction très grossière.

Exemple 2 : bloqueur d'ordre 0



$F_e = 50$ Hz, $T_e = 0.02$ secondes. Reconstruction de mauvaise qualité.

Exemple 2 : bloqueur d'ordre 0



$F_e = 100$ Hz, $T_e = 0.01$ secondes. Reconstruction toujours trop approximative surtout dans les zones à variations rapides.

Limites de l'échantillonnage : approche quantitative

- Nous avons validé par des exemples que la fréquence d'échantillonnage à utiliser pour ne pas perdre trop d'information dépend du signal que l'on veut échantillonner. Y a-t-il une formule permettant de savoir quelle fréquence d'échantillonnage utiliser ?
- Nous allons considérer ici le cas simple d'une sinusoïde $x(t)$ de fréquence fondamentale f_0. Plus f_0 est grand, plus le signal est rapide. Plus f_0 est petit, plus le signal est lent.
- Nous allons tester plusieurs fréquences d'échantillonnage et voir quelle est la valeur minimale à utiliser pour ne pas perdre d'information.

Critère de Nyquist : cas d'une sinusoïde

- Sinusoïde originelle :

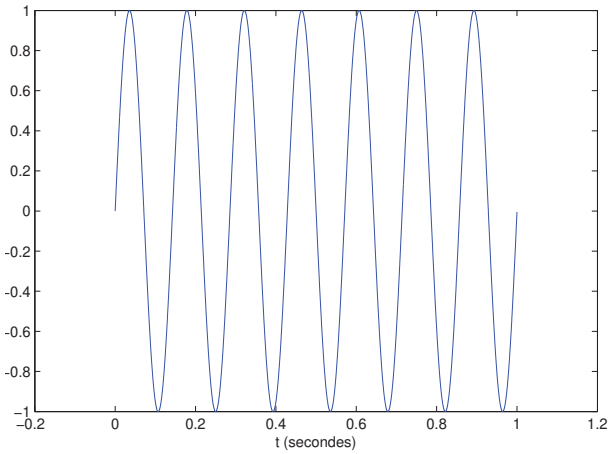
$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \qquad t \in [0, 1[\text{ avec } f_0 = 7 \text{ Hz}$$

- Signal échantillonné avec $N = F_e$ échantillons(on suppose pour simplifier que F_e est un entier) :

$$x[n] = \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{F_e}\right) \qquad \text{avec } n \in [\![0, N-1]\!]$$

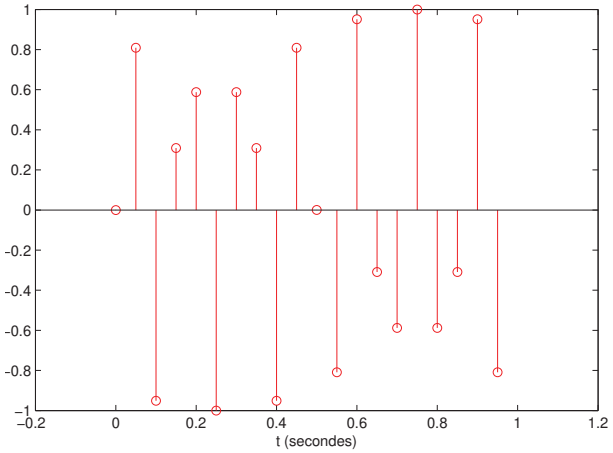
- Nous allons tester plusieurs fréquences d'échantillonnage, et tenter de reconstruire une sinusoïde à partir des points échantillonnés

Sinusoïde originelle



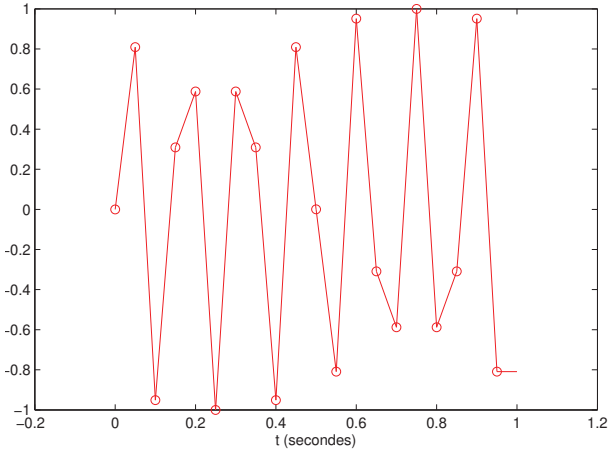
$t \in [0, 1[$ avec $f_0 = 7$ Hz

Sinusoïde échantillonnée à $F_e = 20$ Hz



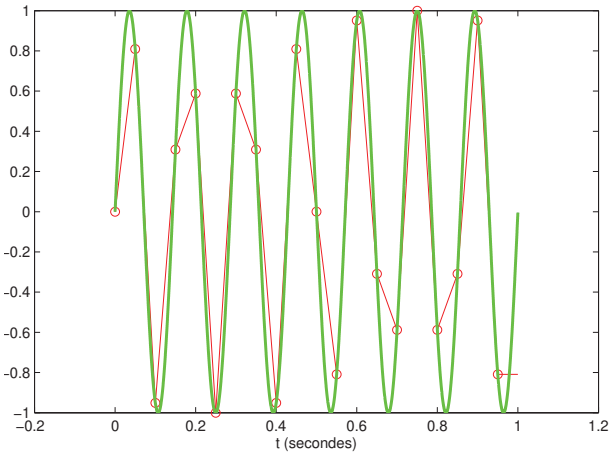
$F_e = 20$ Hz, $T_e = 0.05$ secondes

Signal reconstruit ($F_e = 20$ Hz)



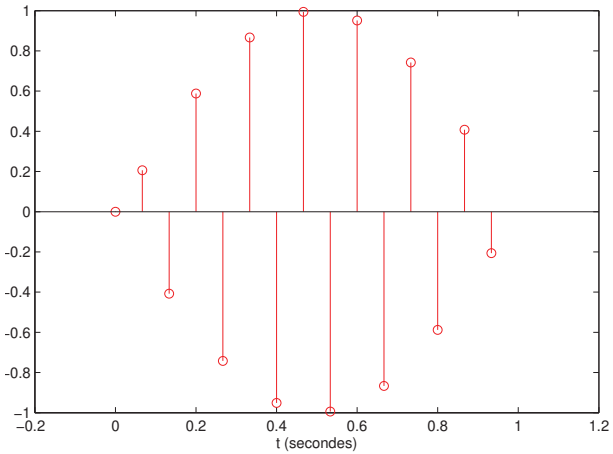
On utilise un bloqueur d'ordre 1 (interpolation linéaire)

Sinusoïde reconstruite ($F_e = 20$ Hz)



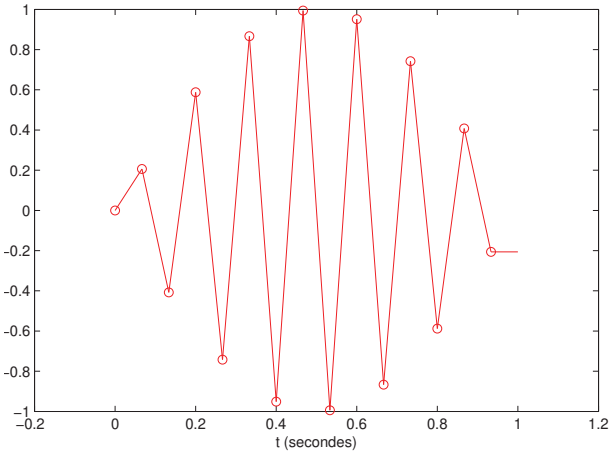
On retrouve une sinusoïde égale à celle d'origine !

Sinusoïde échantillonnée à $F_e = 15$ Hz



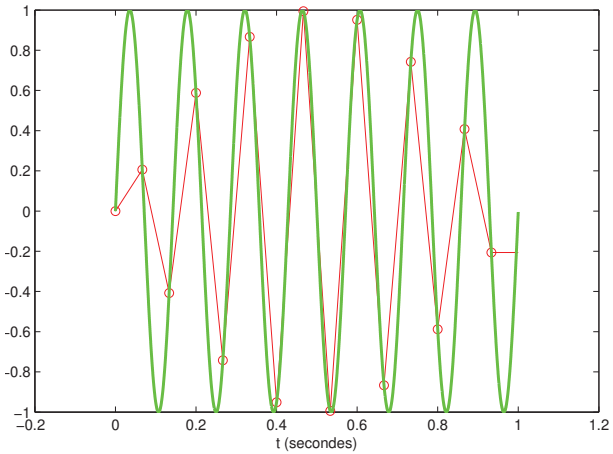
$F_e = 15$ Hz, $T_e = 0.0667$ secondes

Signal reconstruit ($F_e = 15$ Hz)



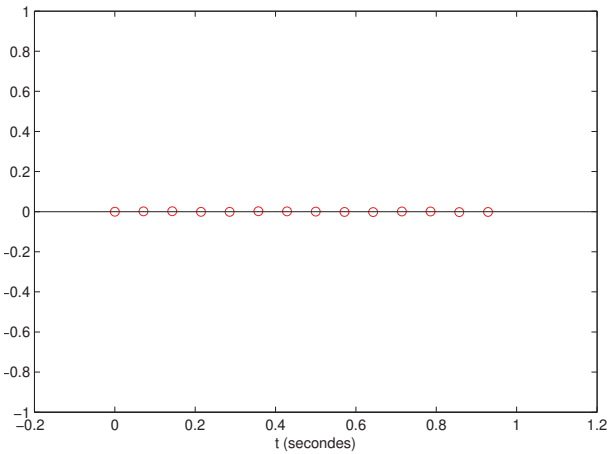
On utilise un bloqueur d'ordre 1 (interpolation linéaire)

Sinusoïde reconstruite ($F_e = 15$ Hz)



On retrouve une sinusoïde égale à celle d'origine !

Sinusoïde échantillonnée à $F_e = 14$ Hz



$F_e = 14$ Hz, $T_e = 0.0714$ secondes

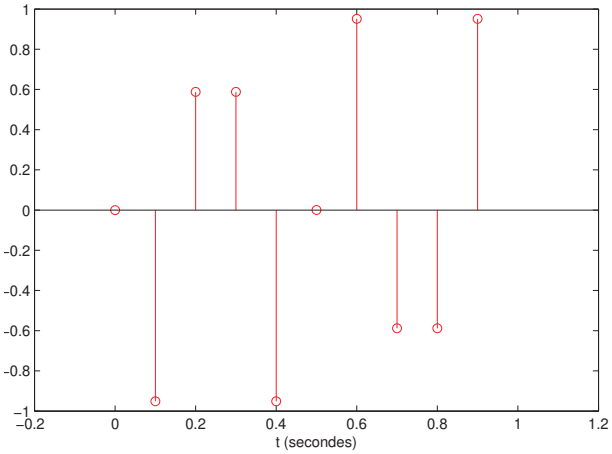
Sinusoïde échantillonnée à $F_e = 14$ Hz

Pour $F_e = 2f_0$, tous les échantillons sont à 0 !

$$\begin{aligned} x[n] &= \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{F_e}\right) \\ &= \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0}\right) \\ &= \sin(\pi n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

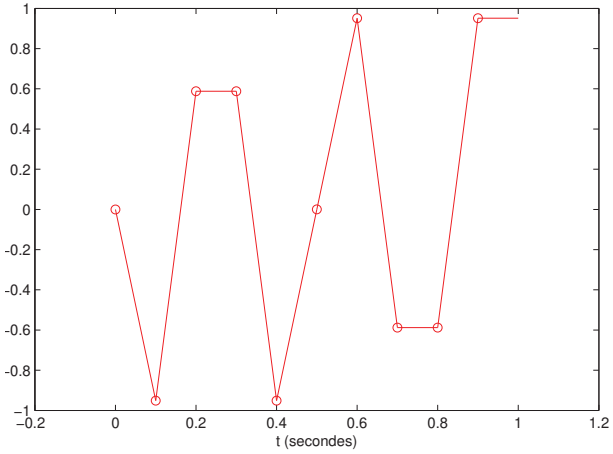
Reconstruction impossible si $F_e = 2f_0$!

Sinusoïde échantillonnée à $F_e = 10$ Hz



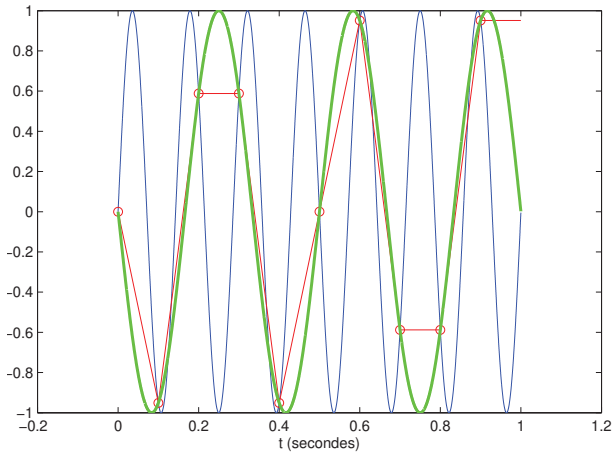
$F_e = 10$ Hz, $T_e = 0.1$ secondes

Signal reconstruit ($F_e = 10$ Hz)



On utilise un bloqueur d'ordre 1 (interpolation linéaire)

Sinusoïde reconstruite ($F_e = 10$ Hz)



On retrouve une autre sinusoïde de fréquence $f_0 = 3$ Hz ! Pourquoi cela ?

Différences entre $f_0 = 7$ Hz et $f_0 = 3$ Hz pour $F_e = 10$ Hz

Cas $f_0 = 7$ Hz

$$x[n] = \sin\left(2\pi \times 7 \times \frac{n}{F_e}\right)$$

- $x[0] = 0$
- $x[1] = \sin\left(2\pi \times 7 \times \frac{1}{10}\right) \approx -0.9511$
- $x[2] = \sin\left(2\pi \times 7 \times \frac{2}{10}\right) \approx 0.5878$
- $x[3] = \sin\left(2\pi \times 7 \times \frac{3}{10}\right) \approx 0.5878$
- ...

Cas $f_0 = 3$ Hz

$$y[n] = \sin\left(2\pi \times 3 \times \frac{n}{F_e}\right)$$

- $y[0] = 0$
- $y[1] = \sin\left(2\pi \times 3 \times \frac{1}{10}\right) \approx 0.9511$
- $y[2] = \sin\left(2\pi \times 3 \times \frac{2}{10}\right) \approx -0.5878$
- $y[3] = \sin\left(2\pi \times 3 \times \frac{3}{10}\right) \approx -0.5878$
- ...

- On a $x[n] = -y[n]$! C'est pour cela que, lorsque l'on relie les points, on a l'impression de voir une sinusoïde de fréquence fondamentale $f_0 = 3$ Hz au lieu de la sinusoïde originelle avec $f_0 = 7$ Hz
- Problème : Si on a accès uniquement aux échantillons, nous n'avons aucun moyen de savoir si la fréquence fondamentale de la sinusoïde originelle était $f_0 = 3$ Hz ou $f_0 = 7$ Hz.

Critère de Nyquist : généralisation

- Etant donnée une sinusoïde de fréquence fondamentale f_0 que l'on souhaite échantillonner à un fréquence d'échantillonnage F_e, on a vu que :
  - Si $F_e > 2f_0$, on est capable de reconstruire parfaitement la sinusoïde à partir des échantillons
  - Si $F_e = 2f_0$, tous les échantillons sont à 0 et il est impossible de reconstruire la sinusoïde
  - Si $F_e < 2f_0$, une sinusoïde avec une autre fréquence fondamentale semble apparaître après reconstruction : il est impossible de reconstruire la sinusoïde
- Critère de Nyquist : Pour reconstruire parfaitement après échantillonnage une sinusoïde de fréquence fondamentale f_0, il faut :

$$\boxed{F_e > 2f_0}$$

Critère de Nyquist : exemple audio

Illustrons ceci par des exemples audio :

- Prenons une sinusoïde de fréquence fondamentale $f_0 = 880$ Hz.
- Testons plusieurs valeurs pour la fréquence d'échantillonnage $F_e = 2000$ Hz, 1800 Hz, 1600 Hz, 1400 Hz
- Reconstruisons un signal audio et... écoutons !

Résultats :

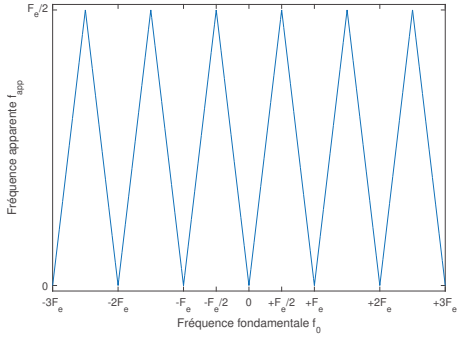
- $F_e = 2000$ Hz, 1800 Hz ($F_e > 2f_0$) : OK !
- $F_e = 1600$ Hz, 1400 Hz ($F_e < 2f_0$) : on entend des notes plus graves. Peut-on savoir quelles fréquences apparaissent ?

Notion de fréquence apparente

On pourrait démontrer que, lorsqu'on échantillonne une sinusoïde de fréquence fondamentale f_0, si la fréquence d'échantillonnage ne vérifie pas le critère de Nyquist, il apparaît après échantillonnage une sinusoïde (éventuellement déphasée) de fréquence apparente f_{app} :

$$\boxed{f_{app} = \min_{k\in\mathbb{Z}} \{|f_0 + kF_e|\}}$$

Notion de fréquence apparente



$$\boxed{f_{app} = \min_{k\in\mathbb{Z}} \{|f_0 + kF_e|\}}$$

- Si on échantillonne à F_e, il est impossible d'entendre une sinusoïde de fréquence fondamentale $f_0 > \frac{F_e}{2}$
- Toutes les fréquences apparentes qui apparaissent sont inférieures à $\frac{F_e}{2}$
- $\boxed{\frac{F_e}{2}}$ **: fréquence de Nyquist**

Exemple

$$f_{app} = \min_{k\in\mathbb{Z}} \{|f_0 + kF_e|\}$$

Dans le cas du signal audio considéré précédemment (avec $f_0 = 880$ Hz) :

- Si $F_e = 2000$ Hz , $f_{app} = 880$ Hz (correspond à $k = 0$)
- Si $F_e = 1800$ Hz , $f_{app} = 880$ Hz (correspond à $k = 0$)
- Si $F_e = 1600$ Hz , $f_{app} = 720$ Hz (correspond à $k = -1$)
- Si $F_e = 1400$ Hz , $f_{app} = 520$ Hz (correspond à $k = -1$)

Méthodologie

Exemple : $f_0 = 80$ Hz et $F_e = 100$ Hz

k	$f_0 + kF_e$	$\lvert f_0 + kF_e \rvert$
⋮	⋮	⋮
-2	-120	120
-1	**-20**	**20**
0	80	80
1	180	180
⋮	⋮	⋮

$$f_{app} = 20 \text{ Hz}$$

- On commence par $k = 0$ et on explore ensuite les valeurs une par une : dès que la valeur absolue augmente on peut s'arrêter.

Sommaire

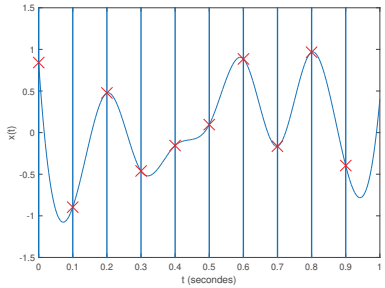
Quantification

Qu'est-ce que la quantification ?

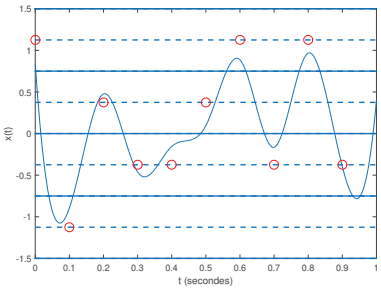
- Principe : Au lieu d'avoir un signal pouvant prendre n'importe quelle valeur, on va définir un ensemble fini de valeurs que le signal peut prendre
- Nous allons définir des intervalles de valeurs, et associer toutes les valeurs du signal comprises dans l'intervalle à une valeur quantifiée correspondant au milieu de l'intervalle
  Exemple : toutes les valeurs comprises entre 0.1 et 0.3 seront associées à la valeur 0.2
- Chacune des valeurs quantifiée sera associée à un code binaire composé de 0 et 1
- En partant d'un signal discret quelconque, on arrive ainsi à un signal numérique composé de 0 et de 1

Echantillonnage vs. quantification

- Attention à ne pas confondre échantillonnage et quantification !
- L'échantillonnage a lieu dans le domaine du temps, tandis que la quantification dépend uniquement de l'amplitude !
- Ainsi la quantification peut également être utilisée en traitement des images, pour arrondir des notes etc...



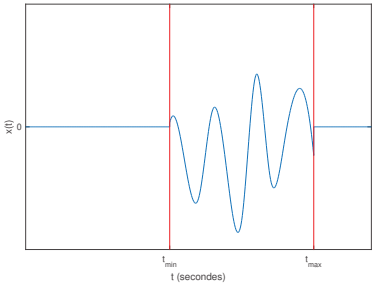
Echantillonnage



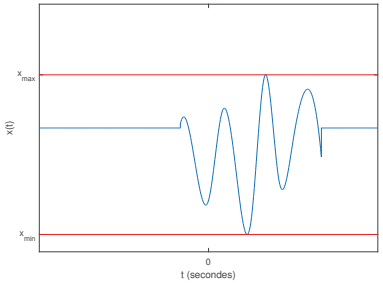
Quantification

Amplitudes d'un signal

- La quantification nécessite de connaître les amplitudes minimales et maximales possibles
  - x_{min} : amplitude la plus petite possible pour le signal
  - x_{max} : amplitude la plus grande possible pour le signal
- Attention de ne pas le confondre avec le support temporel !



Support temporel $[t_{min}, t_{max}]$



Support des amplitudes $[x_{min}, x_{max}]$

Quantification uniforme

- Il existe de nombreuses façons de choisir les intervalles pour quantifier un signal, qui dépendent fortement du type du signal
- Pour définir au mieux les intervalles, il faut savoir l'ordre de grandeur des valeurs prises par le signal
- Nous n'allons voir ici que la quantification uniforme : chaque intervalle de valeurs a la même taille.
- Largeur d'un intervalle constante q appelée **pas de quantification**

Quantification uniforme

- Supposons que notre signal prend des valeurs comprises entre x_{min} et x_{max} et que l'on souhaite coder ces valeurs sur b bits.
- Si on veut coder sur b bits, on va définir 2^b intervalles.
- Afin de couvrir toutes les valeurs possibles du signal, la taille de chaque intervalle sera :

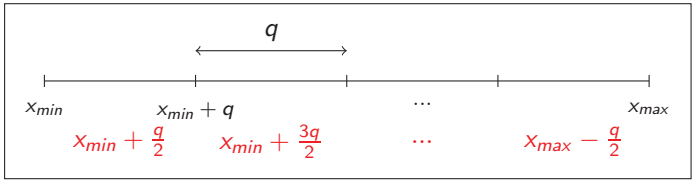
$$q = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^b}$$

- Les intervalles seront donc définis comme

$$[x_{min}, x_{min} + q[, [x_{min} + q, x_{min} + 2q[, \cdots, [x_{max} - q, x_{max}]$$

- Les valeurs une fois quantifiées seront choisies sur une grille

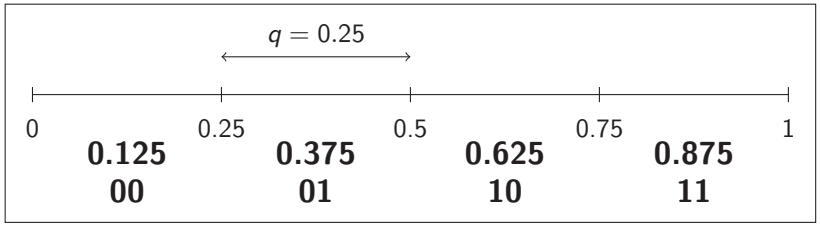
$$x_{min} + \frac{q}{2}, x_{min} + \frac{3q}{2}, \cdots, x_{max} - \frac{q}{2}$$



Exemple

Supposons ici que les valeurs à quantifier sont comprises entre 0 et 1, et que l'on souhaite coder chaque valeur sur 2 bits.

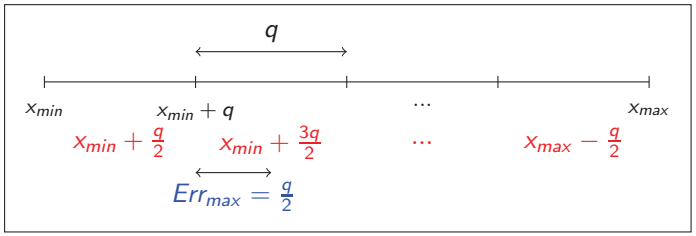
- $2^2 = 4$ intervalles chacun de longueur $q = \frac{1-0}{2^2} = 0.25$
- 4 valeurs quantifiées possibles : 0.125, 0.375, 0.625, 0.875 (milieux des intervalles)



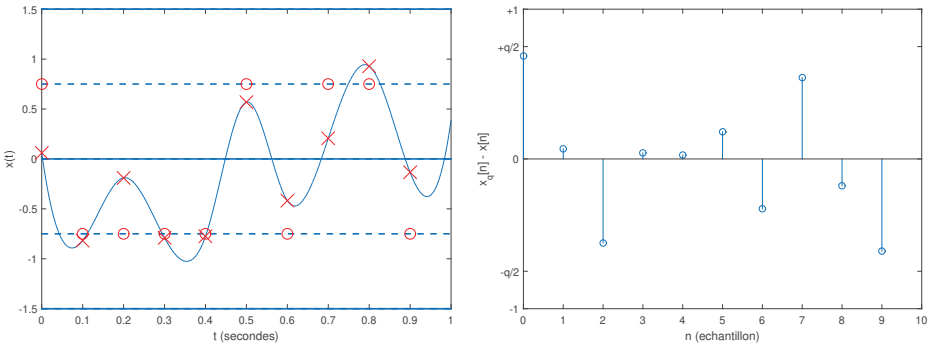
Erreur de quantification

- Plus on quantifie sur peu de bits, plus on perd de l'information
- Erreur de quantification : différence entre la valeur originelle et la valeur quantifiée
- Dans le cas d'une quantification uniforme, l'erreur de quantification maximale pour une valeur est

$$\boxed{\text{erreur maximale} = \frac{q}{2}}$$



Exemple

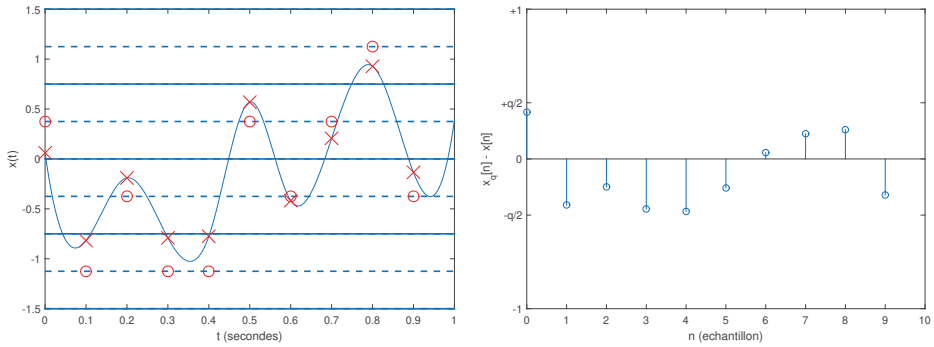


Quantification sur $b = 1$ bit

× : avant quantification, ○ : après quantification

Erreur de quantification $x_q[n] - x[n]$

Exemple

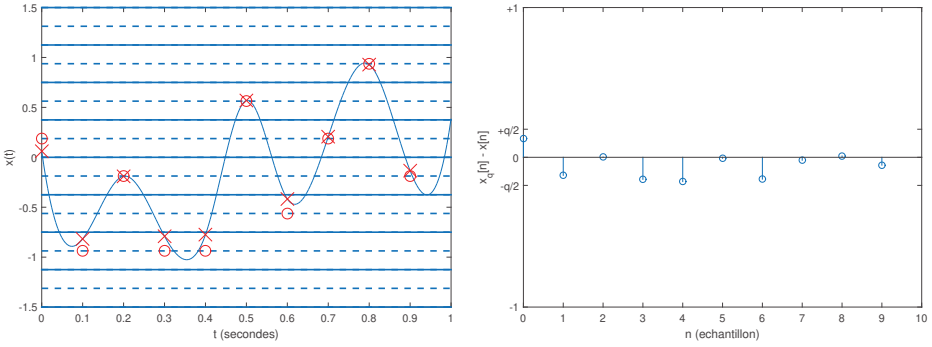


Quantification sur $b = 2$ bits

× : avant quantification, ○ : après quantification

Erreur de quantification $x_q[n] - x[n]$

Exemple

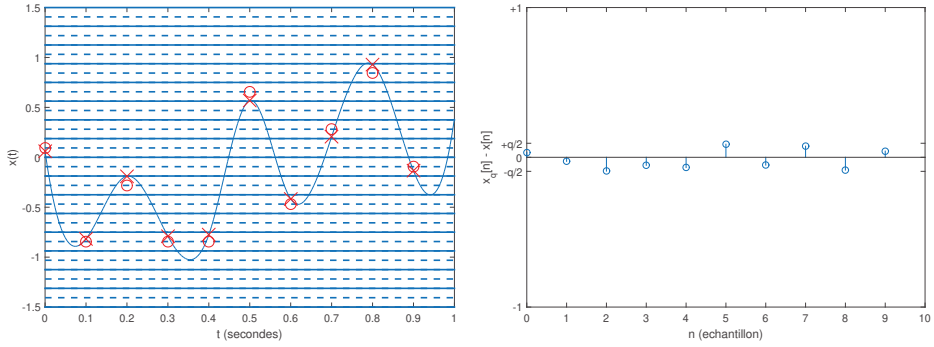


Quantification sur $b = 3$ bits

× : avant quantification, ○ : après quantification

Erreur de quantification $x_q[n] - x[n]$

Exemple



Quantification sur $b = 4$ bits

× : avant quantification, ○ : après quantification

Erreur de quantification $x_q[n] - x[n]$