Introduction au traitement du signal

Cours 1 : Étude des signaux dans le domaine temporel

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année
2019-2020

Sommaire

1. Propriétés temporelles des signaux
1.1 Support temporel
1.2 Causalité
1.3 Parité/Imparité

2. Quelques transformations
2.1 Amplification
2.2 Translation
2.3 Retournement temporel
2.4 Contraction/dilatation

3. Périodicité
3.1 Définition
3.2 Propriétés
3.3 Notion de sinusoïde
3.4 Somme de signaux périodiques

4. Énergies et puissances moyennes totales

5. Quelques signaux types
5.1 Signal porte
5.2 Dirac
5.3 Sinus cardinal

Quelques propriétés des signaux temporels

Qu'est-ce qu'un signal ?

- Grande question : il existe beaucoup de types de signaux !
- Dans cette partie, nous allons définir différentes propriétés qui vont nous permettre de classifier et caractériser les signaux que l'on va traiter

Signaux continus et discrets

Il existe deux types de signaux temporels :

- **Continu :** signal connu à chaque instant t

$$\boxed{x(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$$

  t : temps (souvent exprimé en secondes)
  Ex : onde électromagnétique, signal électrique, ...

- **Discret :** signal connu uniquement à certains instants $t[n]$

$$\boxed{x[n] \text{ avec } n \in \mathbb{Z}}$$

  n : échantillon (sans unité)
  Ex : taux de précipitations enregistré chaque jour, cours de la bourse enregistré chaque heure, ...

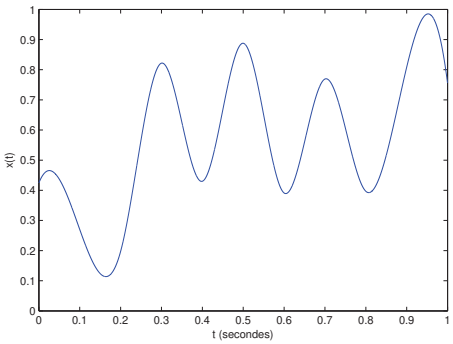
Signaux continus et discrets

En pratique

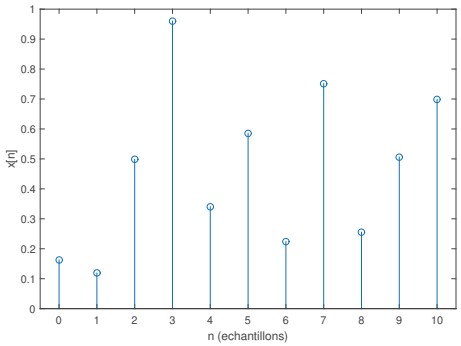
- Les signaux continus $x(t)$ ne sont pas stockables et étudiables sur ordinateur (ils contiennent une infinité de valeurs !). Ils peuvent être vus comme des fonctions mathématiques. On les étudie principalement pour avoir des modèles théoriques des signaux que l'on veut étudier. Ils modélisent des phénomènes physiques tels que les ondes acoustiques, les signaux électriques, etc...
- Les signaux discrets $x[n]$ au contraire peuvent être stockés et étudiés sur ordinateur. Ils ont en général un nombre fini de valeurs non nulles. Un signal discret est ainsi représenté comme un vecteur contenant toutes les valeurs $x[n]$. On y associe un vecteur temps contenant toutes les valeurs $t[n]$ des instants où l'on connaît le signal.

Remarque : Tous les signaux que nous allons étudier avec MATLAB sont donc des signaux discrets (et même numériques, cf prochain cours !). Les signaux continus seront seulement étudiés en TD avec des calculs théoriques.

Exemples



Signal continu $x(t)$
$t \in [0, 1]$



Signal discret $x[n]$
$n \in [\![0, 10]\!]$

Dans le cours, les signaux discrets seront représentés par des segments terminés par des cercles (cf figure ci-dessus)

Comment étudier un signal ?

- En général, pour tous les signaux que nous allons étudier, on disposera
  - Soit d'une équation explicite du signal $x(t)$ ou $x[n]$ qui nous intéresse
  - Soit d'un tracé
  - Soit de deux tableaux donnant les différentes valeurs du signal $x[n]$ et des temps d'enregistrement $t[n]$ (valable uniquement pour les signaux discrets) : c'est ce que l'on aura notamment sous MATLAB
- Malheureusement dans la vraie vie, on ne dispose pas d'équations pour tous les signaux... mais on trouve des ruses ! (cf cours TSA)

Sommaire

Propriétés temporelles des signaux

1.1 Support temporel
1.2 Causalité
1.3 Parité/Imparité

Propriétés temporelles des signaux

Un signal est donc une fonction mathématique qui dépend du temps.

- Un morceau de musique est un signal sonore, qui a une certaine durée. Comment caractériser le fait qu'il n'est pas défini pour tous les temps mais juste sur une durée de 4 minutes ?
- On souhaite, à partir d'aujourd'hui, enregistrer le nombre d'étudiants dans cette salle tous les jours à 9h. Comment caractériser le fait que l'on commence aujourd'hui cet enregistrement ? Comment pourra-t-on savoir à quelle journée correspond chaque valeur ?

On va définir la notion de **support temporel**, qui va caractériser les temps pour lequel le signal est défini.

Support temporel : définition

On appelle support temporel, l'ensemble des temps t (ou des échantillons n si le signal est discret) pour lesquels le signal $x(t)$ (resp $x[n]$) est défini et/ou non nul.

- **Cas continu.** Si cet ensemble correspond à un intervalle ayant des limites hautes et basses, on dit que le support temporel est **borné**. Sinon, on dit qu'il est non borné.
- **Cas discret.** Si cet ensemble contient un nombre fini de valeurs, on dit que le support temporel est **fini**. Sinon, on dit qu'il est infini.

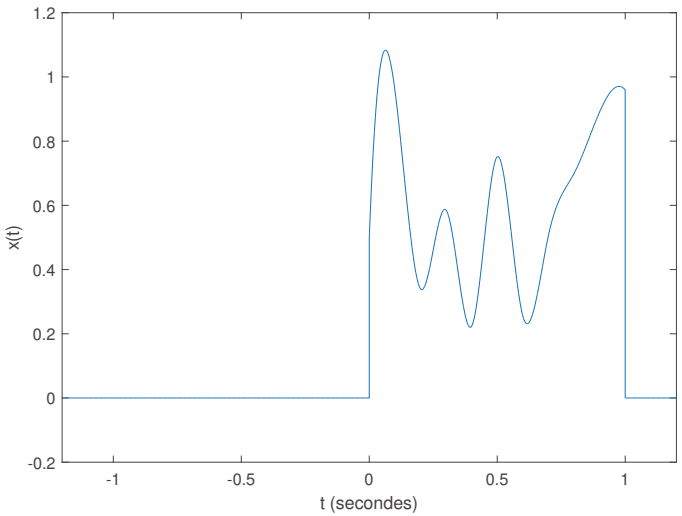
Support temporel : exemples

Quelques exemples :

- Température dans cette salle de classe enregistrée toutes les heures pendant 2 ans : signal discret à support fini
- Intensité électrique dans un câble pendant 1 minute : signal continu à support borné
- Onde électromagnétique observé à partir de l'instant présent jusqu'à la fin du monde (sic...) : signal continu à support non borné

Remarque : Dans la pratique, tous les signaux physiques observés sont à support fini ou à support borné, car sinon cela voudrait dire qu'on a pu les observer sur une durée infinie.

Support temporel : exemples



Support temporel $[0, 1]$

Causalité : définition

On dit qu'un sigal est **causal** si et seulement si :

- **Cas continu**
$$x(t) = 0 \quad \forall t < 0$$
- **Cas discret**
$$x[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

Un signal causal est un signal défini uniquement pour des temps positifs ou nuls

Causalité stricte

On dit qu'un sigal est **strictement causal** si et seulement si :

- **Cas continu**
$$x(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$$
- **Cas discret**
$$x[n] = 0 \quad \forall n \leq 0$$

Un signal strictement causal est un signal défini uniquement pour des temps strictement positifs

Causalité des signaux mesurés

- Si les signaux sont issus de mesures, l'axe des temps est parfois assez artificiel (à partir de quand définit-on le temps ?)
- Par convention, on décide souvent par convention que l'on commence à observer le signal à $t = 0$ et donc tous les signaux issus de capteurs peuvent être vus comme des signaux causaux
- Quelques exceptions : température, bourse qui sont calés sur le calendrier

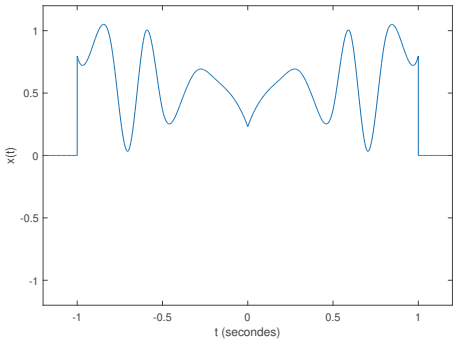
Parité : définition

- Un signal temporel est une fonction mathématique, on peut donc le caractériser grâce à des propriétés des fonctions, telles que la parité ou l'imparité
- Un signal est **pair** si et seulement si
  - **Cas continu**
$$x(-t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
  - **Cas discret**
$$x[-n] = x[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
- Un signal pair non nul ne peut donc pas être causal
- Le support temporel d'un signal pair est nécessairement symétrique

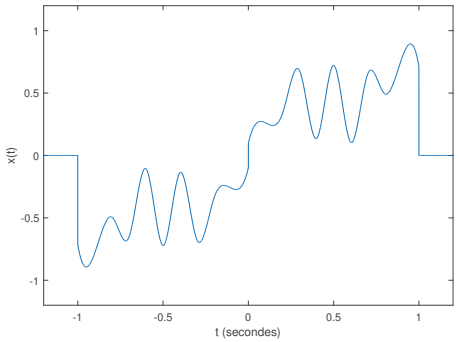
Imparité : définition

- Un signal est **impair** si et seulement si
  - **Cas continu**
    $$x(-t) = -x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
  - **Cas discret**
    $$x[-n] = -x[n] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
- Un signal impair non nul ne peut donc pas être causal
- Le support temporel d'un signal impair est nécessairement symétrique

Parité/imparité : exemples



Signal pair



Signal impair

Sommaire

Quelques transformations

2.1 Amplification
2.2 Translation
2.3 Retournement temporel
2.4 Contraction/dilatation

Quelques transformations

Nous allons maintenant voir quelques transformations simples que l'on peut effectuer sur les signaux temporels. Nous en verrons d'autres plus compliquées dans les prochains cours.

- Amplification
- Translation
- Retournement temporel
- Contraction/dilatation temporelle

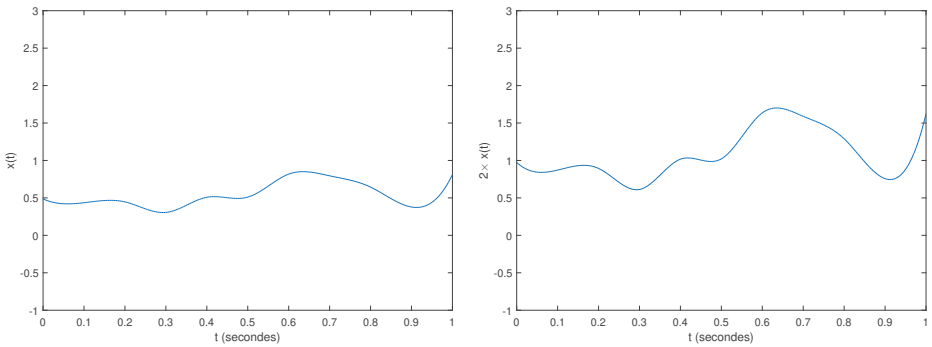
Amplification

Etant donné un signal $x(t)$ (resp. $x[n]$), l'**amplification** consiste à former le signal

$$y(t) = A \times x(t) \qquad y[n] = A \times x[n]$$

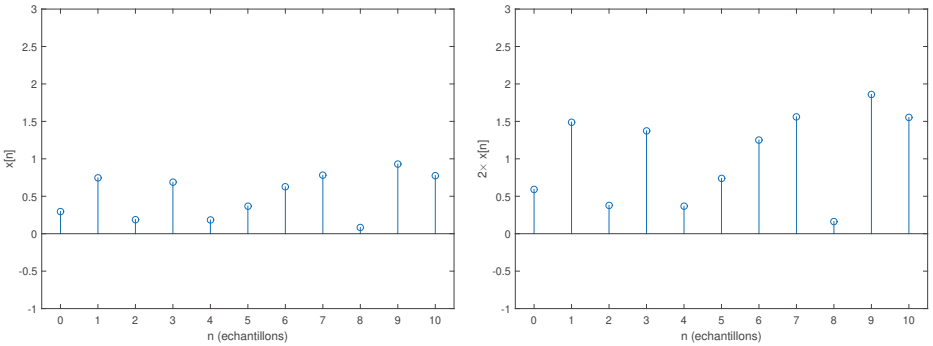
- Si $A > 1$, on forme un signal avec une amplitude plus élevée
- Si $A < 1$, on diminue l'amplitude du signal
- Ce type de dispositif est particulièrement employé en électronique ou en optique
- L'amplification d'un signal ne modifie pas son support temporel, ni ses propriétés temporelles (causalité, parité, etc...)

Exemple : cas continu



$$y(t) = 2 \times x(t)$$

Exemple : cas discret



$$y[n] = 2 \times x[n]$$

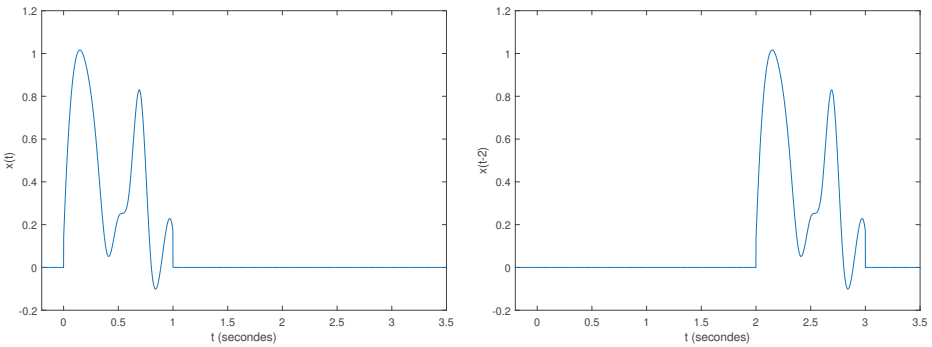
Translation

Etant donné un signal $x(t)$ (resp. $x[n]$), la **translation** de paramètre t_0 (resp. n_0) consiste à former le signal

$$y(t) = x(t - t_0) \qquad y[n] = x[n - n_0]$$

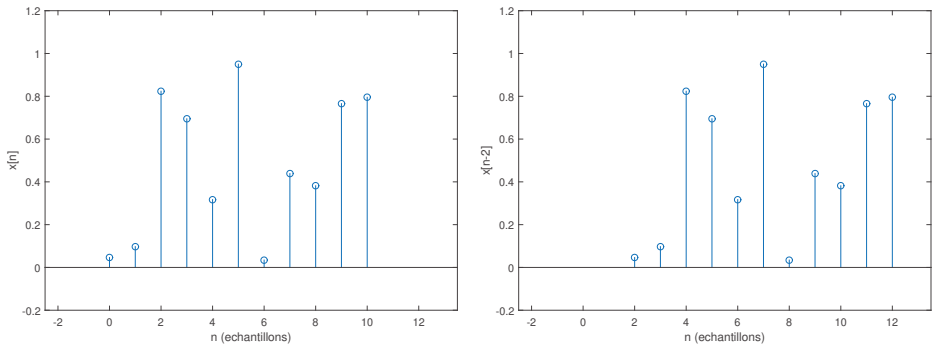
- Si $t_0 > 0$ (resp. $n_0 > 0$), cela revient à translater le signal $x(t)$ (resp. $x[n]$) de t_0 (resp. n_0) vers la droite. Attention, le signe $-$ indique bien un déplacement vers les temps positifs et non négatifs !
- Si l'on a $y(t) = x(t + t_0)$ et $t_0 > 0$, on translate le signal vers la gauche ! (idem pour le cas discret).
- La translation d'un signal modifie son support temporel, et peut modifier ses propriétés temporelles (causalité, parité, etc...)

Exemple : cas continu



$$y(t) = x(t-2)$$

Exemple : cas discret



$$y[n] = x[n-2]$$

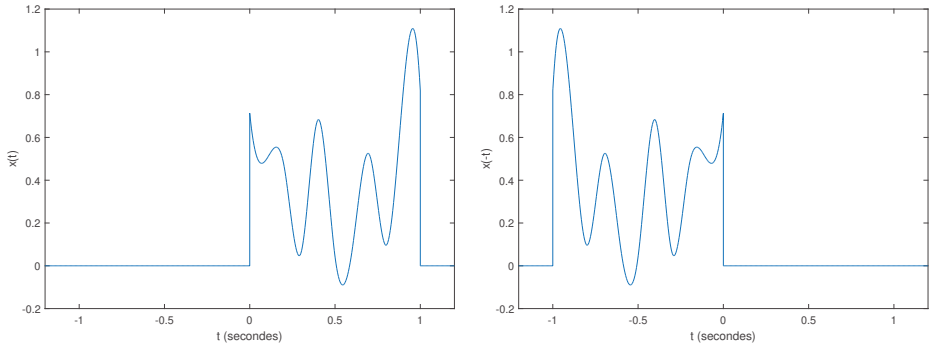
Retournement temporel

Etant donné un signal $x(t)$ (resp. $x[n]$), le **retournement temporel** consiste à former le signal

$$y(t) = x(-t) \qquad y[n] = x[-n]$$

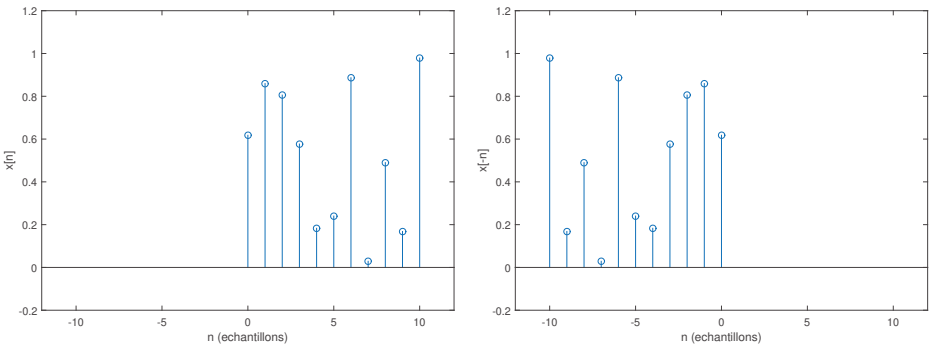
- Cela revient à inverser l'axe des temps.
- Concrètement, le signal de sortie est obtenu par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.
- Après retournement temporel, un signal causal ne l'est plus.

Exemple : cas continu



$$y(t) = x(-t)$$

Exemple : cas discret



$$y[n] = x[-n]$$

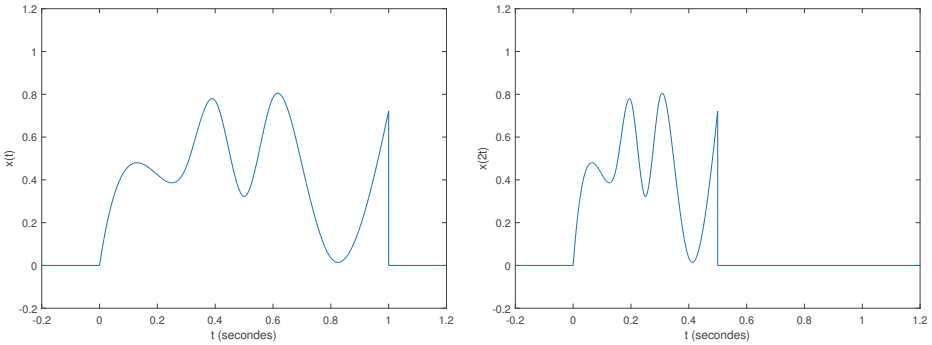
Contraction/dilatation

Etant donné un signal continu $x(t)$, et un réel $\alpha > 0$, la **contraction** (si $\alpha > 1$) ou la **dilatation** (si $\alpha < 1$) consiste à former le signal

$$y(t) = x(\alpha t)$$

- Si le support temporel du signal $x(t)$ est $[a, b]$, celui du signal $y(t)$ est $\left[\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}\right]$: le signal obtenu sera donc plus court si $\alpha > 1$ (d'où le nom de contraction), et plus long si $\alpha < 1$ (d'où le nom de dilatation).
- Ces notions n'existent pas de façon évidente pour les signaux discrets

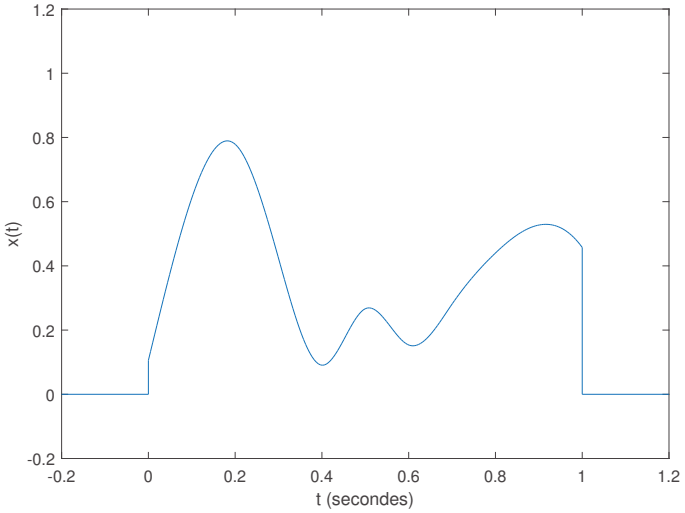
Exemple : cas continu



$$y(t) = x(2t)$$

Signal deux fois plus court : nouveau support temporel [0, 0.5]

Exemple de tracé



Signal $x(t)$
On veut tracer :

$$y(t) = x\left(\frac{6-t}{2}\right)$$

Exemple de tracé

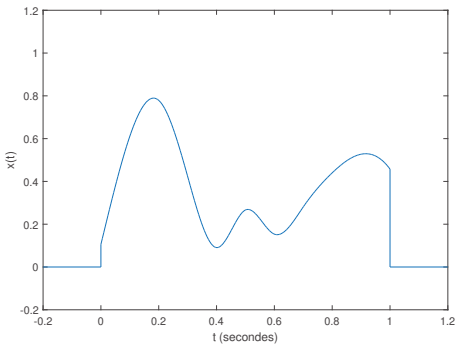
$$y(t) = x\left(\frac{6-t}{2}\right)$$

Méthodologie :

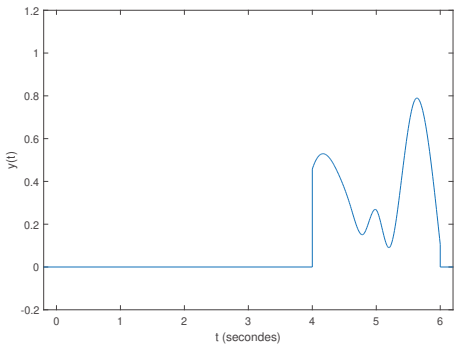
- $x(t)$ a un support temporel $[0, 1]$
- $y(t)$ a subi une translation, une dilatation et un retournement temporel. Il est défini pour

$$\begin{aligned} 0 \leq & \frac{6-t}{2} & \leq 1 \\ 0 \leq & 6-t & \leq 2 \\ -6 \leq & -t & \leq -4 \\ 4 \leq & t & \leq 6 \end{aligned}$$

Exemple de tracé



$x(t)$
support temporel $[0, 1]$



$y(t) = x\left(\frac{6-t}{2}\right)$
support temporel $[4, 6]$

Sommaire

Périodicité

3.1 Définition
3.2 Propriétés
3.3 Notion de sinusoïde
3.4 Somme de signaux périodiques

Périodicité : définition

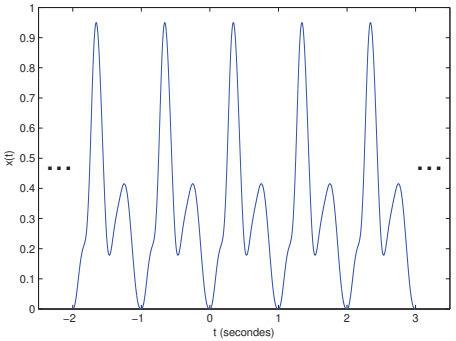
- **Cas continu.** On dit qu'un signal $x(t)$ est périodique de période T s'il existe un réel T non nul tel que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t+T) = x(t)}$$

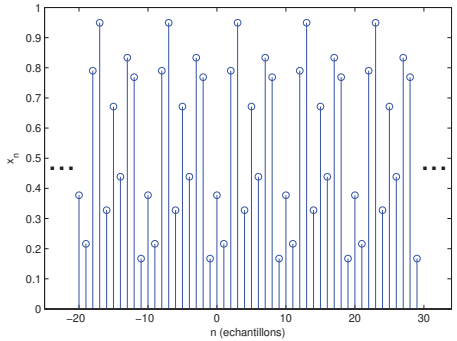
- **Cas discret.** On dit qu'un signal $x[n]$ est périodique de période M s'il existe un entier M non nul tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x[n+M] = x[n]}$$

Périodicité : exemples



Signal continu $x(t)$
$T_0 = 1$ seconde



Signal discret $x[n]$
$M_0 = 10$ échantillons

Propriétés des signaux périodiques

- Beaucoup de signaux de la vie réelle sont périodiques : phénomènes ondulatoires, courant électrique du secteur, signaux horloges des ordinateurs, etc...
- Dans un signal périodique, il existe un motif qui se repète une infinité de fois. Ainsi, par définition, un signal périodique continu (resp. discret) a nécessairement un support temporel non borné (resp. infini)
- Pour repérer les signaux périodiques sur les tracés, on rajoutera la mention "..." qui montre que le motif se repète à l'infini

Période et fréquence fondamentale

- Si un signal continu (resp. discret) est périodique de période T (resp. M), alors il est aussi périodique de période kT (resp kM) avec $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} x(t+kT) &= x(t+(k-1)T+T) \\ &= x(t+(k-1)T) \\ &= \vdots \\ &= x(t) \end{aligned}$$

- Etant donné un signal périodique, on appelle **période fondamentale** et on note T_0 (resp. M_0), la plus petite période du signal strictement positive. Elle s'exprime en secondes (resp. échantillons).
- T (resp. M) est une période du signal si et seulement c'est un multiple de la période fondamentale T_0 (resp. M_0).

Fréquence fondamentale

- Pour un signal continu, on appelle **fréquence fondamentale** et on note f_0 la quantité

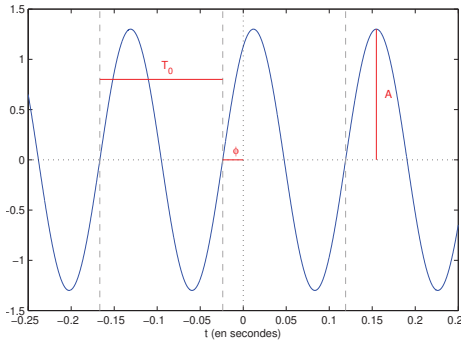
$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

- Elle s'exprime en Hertz et est toujours positive
- La fréquence fondamentale correspond au nombre de périodes (donc de motifs fondamentaux) en une seconde.

Notion de sinusoïde

- L'étude des signaux périodiques est fondamentale en traitement du signal. Elle met en évidence la notion de fréquence qui est une base de l'analyse des signaux (cf prochains cours)
- Parmi ces signaux, l'un des plus importants est la **sinusoïde**.
- Le signal sinusoïdal est couramment utilisé pour modéliser le son, les vibrations, le courant électrique ou les ondes électromagnétiques : c'est donc un outil fondamental notamment en physique
- Il existe plusieurs modèles selon les domaines : celui utilisé dans ce cours se base sur la fonction sinus.

Sinusoïde



$A = 1.3$, $f_0 = 7$ Hz, $\phi = \frac{\pi}{3}$

$$\boxed{x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)}$$

- A : amplitude
- f_0 : fréquence fondamentale (en Hz)
- ϕ : phase à l'origine
- $x(t)$ est périodique de période fondamentale

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{f_0}}$$

Démonstration

- Si $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)$ est périodique de période T, alors

$$x(t+T) = x(t)$$

- Donc

$$A\sin(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 T + \phi) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

- Comme la fonction sinus est 2π-périodique, cela signifie que $2\pi f_0 T$ est un multiple de 2π

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, 2\pi f_0 T = 2\pi k$$

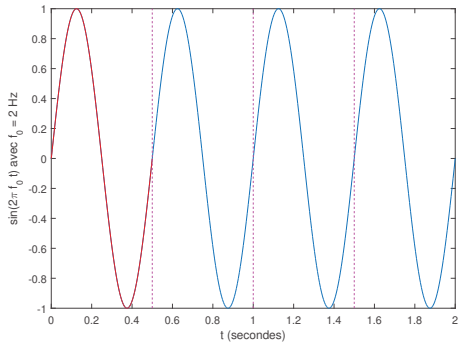
- Donc

$$T = \frac{k}{f_0}$$

et la plus petite valeur possible est bien la période fondamentale

$$T_0 = \frac{1}{f_0}$$

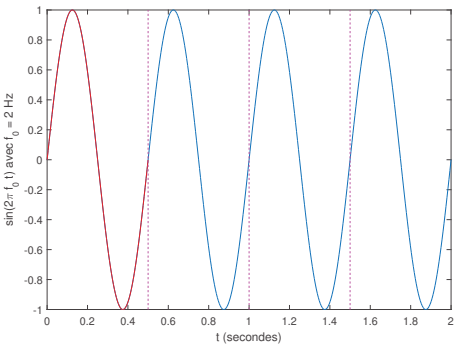
Tracé d'une sinusoïde



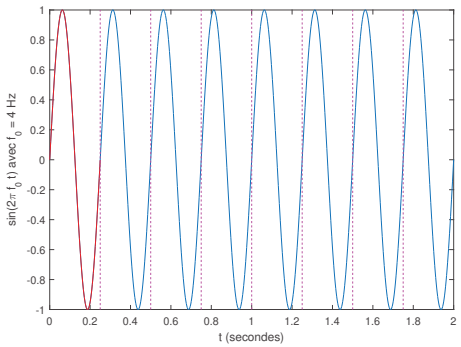
$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = 2$ Hz

- Le motif principal dure bien $T_0 = \frac{1}{f_0} = 0.5$ secondes
- En une seconde il y a bien $f_0 = 2$ périodes

Notion de fréquence fondamentale



$f_0 = 2$ Hz
2 périodes par seconde



$f_0 = 4$ Hz
4 périodes par seconde

- Plus f_0 est élevée, plus le signal varie de façon rapide
- Une note de musique parfaitement pure peut être modélisée par une sinusoide : dans ce cas, plus f_0 est élevée, plus le son est aigu

Somme de signaux périodiques

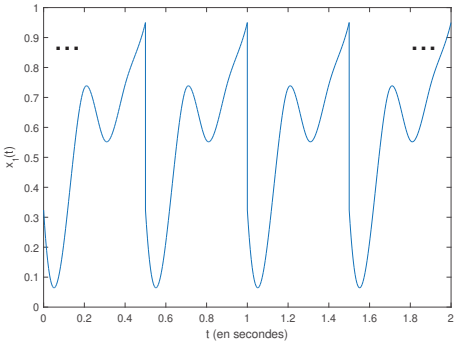
Etant donnés deux signaux périodiques $x_1(t)$ et $x_2(t)$, respectivement de périodes fondamentales T_1 et T_2, à quelles conditions le signal

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

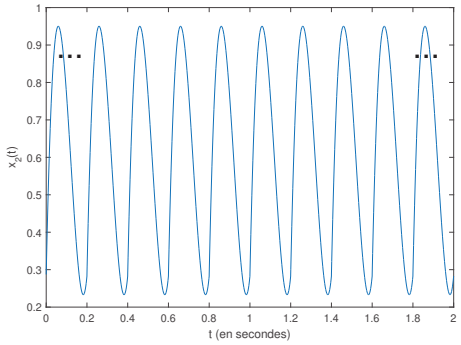
est-il également périodique ? Quelle est dans ce cas sa période fondamentale ?

- Comme nous allons le voir, la réponse n'est pas triviale
- En particulier, dans de nombreux cas, $x(t)$ n'est PAS un signal périodique !

Exemple



Signal $x_1(t)$
$T_1 = 0.5$ secondes



Signal $x_2(t)$
$T_2 = 0.2$ secondes

Démonstration

Raisonnons à l'envers :

- Si $x(t)$ est périodique de période T, alors

$$x(t+T) = x(t)$$

- Donc

$$x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t) + x_2(t)$$

- Il faut donc que T soit une période du signal $x_1(t)$ et une période du signal $x_2(t)$.
- Par définition de la période fondamentale, si T est une période du signal $x_1(t)$, c'est un multiple de sa période fondamentale T_1. Il existe donc $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$T = k_1 \ T_1$$

- De la même façon, il existe $k_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$T = k_2 \ T_2$$

Démonstration

- On a donc que si $x(t)$ est périodique de période T, alors

$$T = k_1\ T_1 = k_2\ T_2$$

donc

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

- On peut donc en conclure que $x(t)$ est périodique si et seulement si le rapport $\frac{T_1}{T_2}$ peut s'écrire comme une fraction de deux entiers (on dit aussi que T_1 et T_2 sont commensurables).
- Dans ce cas, on sait que le signal est périodique : comment déterminer sa période fondamentale T_0 ?

Démonstration

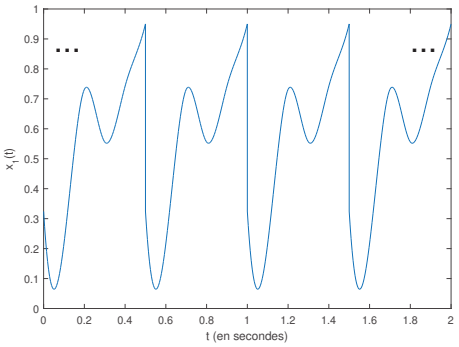
$$T = k_1\ T_1 = k_2\ T_2$$

- Pour déterminer la période fondamentale, il faut trouver la plus petite valeur positive pour T, donc les plus petites valeurs pour k_1 et k_2.
- Il suffit pour cela de simplifier le plus possible la fraction

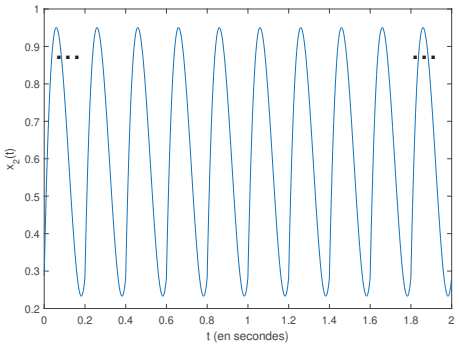
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1}$$

ce qui permettra d'avoir les plus petites valeurs possibles

Exemple



Signal $x_1(t)$
$T_1 = 0.5$ secondes

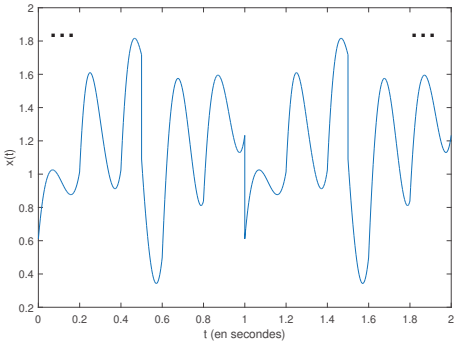


Signal $x_2(t)$
$T_2 = 0.2$ secondes

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$$

- T_1 et T_2 sont commensurables donc $x(t)$ est bien périodique !

Exemple



Signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

- On ne peut pas simplifier plus la fraction, on a donc $k_1 = 5$ et $k_2 = 2$
- Donc la période fondamentale est $T_0 = 5 \times 0.2 = 2 \times 0.5 = 1$ seconde

Sommaire

Énergies et puissances moyennes totales

Energie et puissance

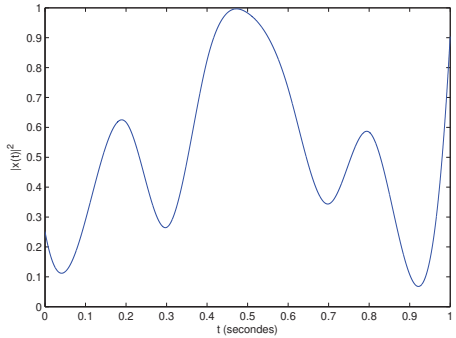
- Il existe des liens très forts entre le traitement du signal et l'électronique
- Historiquement, la plupart des signaux étudiés étaient en réalité des signaux électriques
  Exemple : Un son produit une variation de pression qui est capturée par une membrane (microphone) pour être transformée en courant électrique
- Certaines notions issues de l'électronique se sont ainsi étendues à tous les signaux, telles que l'énergie ou la puissance
- En électronique si l'on suppose que le courant est continu, on définit la notion de puissance consommée par un appareil

$$P = UI$$

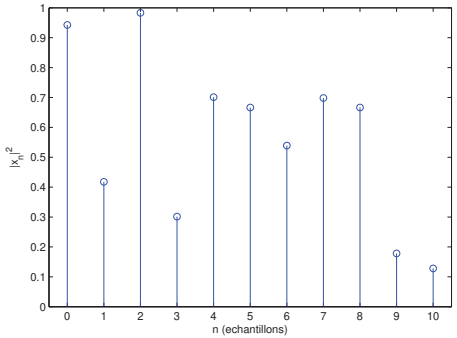
  où U est la tension à ses bornes et I l'intensité du courant qui le traverse
- Dans le cas général, les signaux ne sont pas constants, et la notion de puissance peut être soit instantannée (définie pour chaque temps t) soit moyenne sur un intervalle de temps

Puissance instantanée

- Etant donné un signal continu $x(t)$ (resp. discret $x[n]$), on appelle puissance instantanée la quantité $|x(t)|^2$ (resp $|x[n]|^2$)



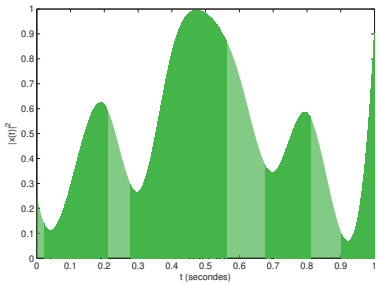
Signal continu
$|x(t)|^2$



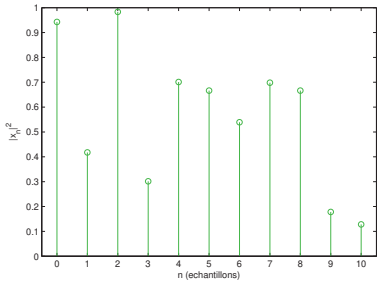
Signal discret
$|x[n]|^2$

Energie totale

- **L'énergie totale** E_x correspond à la somme de la puissance instantanée sur $\mathbb{R}$ (pour les signaux continus) ou sur $\mathbb{Z}$ (pour les signaux discrets)



Signal continu



Signal discret

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}$$

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2}$$

- On observe ici le parallèle entre le signe $\int$ pour les signaux continus et le signe $\sum$ pour les signaux discrets

Puissance moyenne (totale)

- **La puissance moyenne (totale)** P_x correspond à la valeur moyenne de la puissance instantanée sur $\mathbb{R}$ (pour les signaux continus) ou sur $\mathbb{Z}$ (pour les signaux discrets)
- **Cas continu.**

$$\boxed{P_x = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt}$$

- **Cas discret.**

$$\boxed{P_x = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^{m} |x[n]|^2}$$

- Si le signal est à support temporel borné ou fini, sa puissance moyenne totale est donc nulle (sauf cas exceptionnels)

Classification des signaux

- Si $E_x < +\infty$, on dit que le signal est **à énergie finie**. En pratique, c'est le cas de tous les signaux physiquement réalisables. Un signal à énergie finie a une puissance moyenne totale nulle.
- Si $E_x = +\infty$ et $P_x < +\infty$, on dit que le signal est **à puissance finie**. Bien que ces signaux n'existent pas dans le monde réel, ils sont utiles pour construire des modèles étudiables. Un signal à puissance finie et de puissance moyenne totale non nulle ne peut pas être d'énergie finie.

Cas des signaux périodiques

- On a déjà vu qu'un signal périodique se répliquait une infinité de fois, il est donc nécessairement d'énergie infinie $E_x = +\infty$ (sauf bien sur s'il est nul !)
- **Cas continu.** Si un signal $x(t)$ est périodique de période T, on peut montrer que

$$\boxed{\forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt}$$

- **Cas discret.** Si un signal $x[n]$ est périodique de période M, on peut montrer que

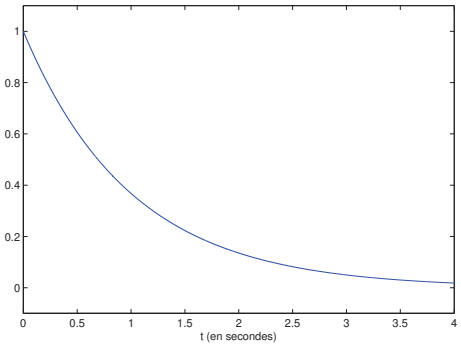
$$\boxed{\forall n_0 \in \mathbb{Z}, \quad P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=n_0}^{n_0+M-1} |x[n]|^2}$$

- Sauf cas exceptionnel, un signal périodique est donc à puissance finie.
- Au lieu de faire la moyenne de la puissance instantannée sur l'ensemble des temps, il suffit de le faire sur n'importe quelle période de durée T (resp. M).

Cas des signaux à support borné/fini

- Si un signal $x(t)$ est à support borné, l'intégrale E_x est nulle en dehors de son support, et l'intégrale infinie devient une intégrale finie, qui, sauf cas exceptionnel, est donc une quantité finie. Il est donc à énergie finie et à puissance nulle.
- Si un signal $x[n]$ est à support fini, la somme E_x est nulle en dehors de son support, et la somme infinie devient une somme finie, qui, sauf cas exceptionnel, est donc une quantité finie. Il est donc à énergie finie et à puissance nulle.

Exemple 1



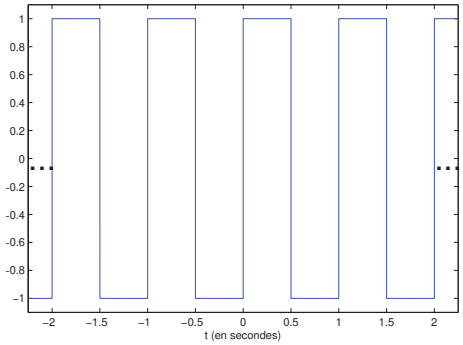
$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Support temporel non borné
- Énergie totale

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{+\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Energie finie donc $P_x = 0$

Exemple 2



- Support temporel non borné
- Signal périodique de période $T = 1$ seconde
- $E_x = +\infty$
- P_x peut être calculée sur n'importe quel intervalle de longueur T

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} |1|^2 dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^T |-1|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Sommaire

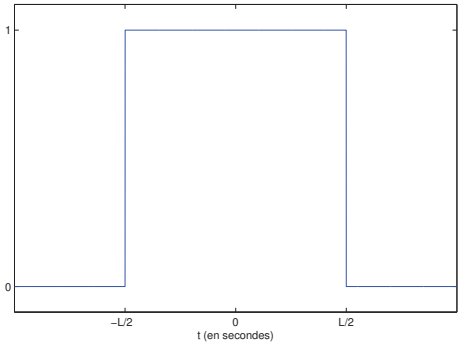
Quelques signaux types

5.1 Signal porte
5.2 Dirac
5.3 Sinus cardinal

Quelques signaux types

- La plupart des signaux de la vie courante sont aléatoires ou sont influencés par de nombreux paramètres.
- Afin de pouvoir les étudier de façon théorique, on construit des modèles de signaux, qui n'existent pas nécessairement dans le monde physique, mais permettent de réaliser des tâches impossibles autrement (ex : prédiction de température, reconnaissance d'une note de musique)
- Dans cette partie, on présente quelques signaux types modèles très utilisés en traitement du signal

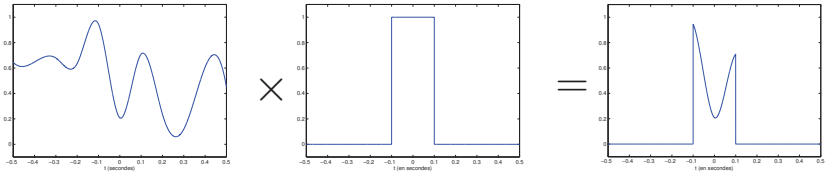
Signal porte



$$\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

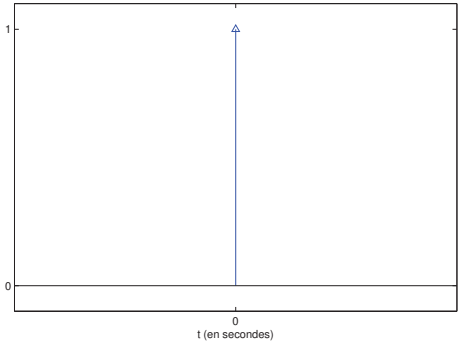
Signal porte

- Si on prend un signal quelconque $x(t)$ et qu'on le multiplie par un signal porte, cela revient à étudier le signal $x(t)$ uniquement sur le signal $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$



- De façon équivalente, un signal quelconque de support temporel borné égal à L peut être vu comme le produit d'un signal à support temporel non borné et d'une fonction porte
- On travaille aussi souvent sur une version périodisée de ce signal : signal carré ou en créneau (cf TD 1)

Dirac (continu)



$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

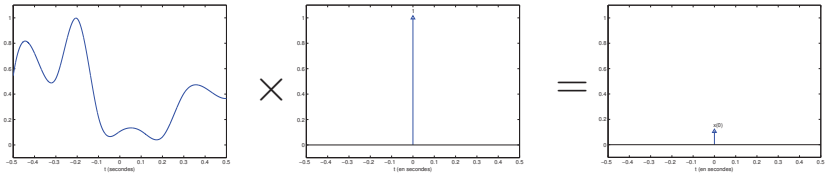
- En théorie, ce *signal* n'est pas un signal mais ce qu'on appelle une distribution (hors programme)
- Il vérifie la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- On le représente par une flèche entre 0 et 1 (attention à ne pas confondre avec un signal discret). La valeur 1 représente la masse (ou *amplitude*) du Dirac.
- On ne peut pas définir son énergie totale ni sa puissance moyenne totale

Dirac (continu)

- Si on prend un signal quelconque $x(t)$ et qu'on le multiplie par un Dirac, on obtient un Dirac de masse $x(0)$



- On a donc :

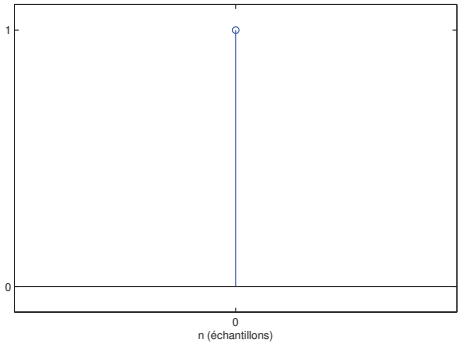
$$x(t) \times \delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- Plus généralement on a la propriété :

$$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ce *signal* est très utile pour établir des propriétés d'échantillonnage (cf cours suivant), mais il ne peut pas exister dans la vie réelle.

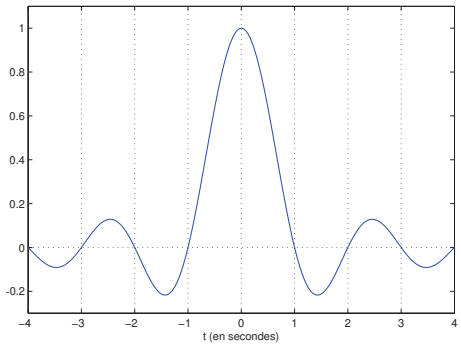
Dirac (discret)



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Version discrète de la distribution de Dirac
- Parfois aussi appelé symbole de Kronecker

Sinus cardinal



$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}$$

- Comme nous le verrons, ce signal apparaîtra naturellement quand nous allons calculer des transformées de Fourier
- Il est aussi très utilisé en physique ondulatoire
- Ce signal s'annule pour tous les temps t entiers : il définit des bosses que l'on appelle des *lobes*. Le lobe principal a une largeur de 2.