Introduction au Traitement du Signal

Formulaire de traitement du signal

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Télécommunications et Réseaux - 1ère année

2018-2019

Nombres complexes

	Forme algébrique	Forme polaire
Définition	$z = x + jy$ x : partie réelle y : partie imaginaire	$z = re^{j\theta}$ r : module θ : argument
Conjugué	$z^* = x - jy$	$z^* = re^{-j\theta}$

$$|z\, z'| = |z|\, |z'| \qquad |z|^2 = z\, z^* \qquad \left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{|z|^2}$$

Formules d'Euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x) \qquad \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Décibels

Echelle linaire X	**Echelle en décibels** X_{dB}
$X = 10^{\frac{X_{dB}}{10}}$	$X_{dB} = 10\log_{10}(X)$

$$\log_{10}(10^x) = 10x \qquad 10\log_{10}(xy) = 10\log_{10}(x) + 10\log_{10}(y) \qquad 10\log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) = 10\log_{10}(x) - 10\log_{10}(y)$$

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_{dB}	0	3	4.8	6	7	7.8	8.5	9	9.5

Signaux usuels

Signal porte de durée L	$\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Sinus cardinal	$\text{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}$

Distribution de Dirac

Définition	$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Intégration	$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
Produit	$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$
Produit de convolution	$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$

Energie et puissances (domaine temporel)

	Cas continu	**Cas discret**
Energie totale	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert^2$
Puissance moyenne totale	$P_x = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$P_x = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^{m} \lvert x[n]\rvert^2$
Puissance moyenne totale (cas périodique)	$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\forall n_0 \in \mathbb{Z}, \quad P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=n_0}^{n_0+M-1} \lvert x[n]\rvert^2$

Produit de convolution

	Cas continu	**Cas discret**
Définition	$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau) d\tau$	$(f*g)[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[n-m]\, g[m]$
Commutativité	$(f*g)(t) = (g*f)(t)$	$(f*g)[n] = (g*f)[n]$
Distributivité	$f(t)*[g(t)+h(t)] = (f*g)(t)+(f*h)(t)$	$f[n]*(g[n]+h[n]) = (f*g)[n]+(f*h)[n]$
Associativité	$f(t)*[g(t)*h(t)] = [f(t)*g(t)]*h(t)$	$f[n]*(g[n]*h[n]) = (f[n]*g[n])*h[n]$

Transformée de Fourier (propriétés)

Domaine temporel	**Domaine fréquentiel**
$x(t)$	$X(f)$
Transformée de Fourier inverse $x(t) = \mathcal{TF}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft} df$	Transformée de Fourier $X(f) = \mathcal{TF}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft} dt$
$\lambda x(t) + \mu y(t)$	$\lambda X(f) + \mu Y(f)$
$x(t) \times y(t)$	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	$X(f) \times Y(f)$
$x(t-t_0)$	$X(f)\ e^{-j2\pi f t_0}$
$x(t)\ e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f-f_0)$
$x(t) \in \mathbb{R}$	$X(-f) = X^*(f)$, $\lvert X(-f)\rvert = X(f)$, $\arg\{X(-f)\} = -\arg\{X(f)\}$

Transformées de Fourier usuelles

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\dfrac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\dfrac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$
Signal porte centré de durée L $\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$L\,\mathrm{sinc}\,(Lf) = \begin{cases} L & \text{si } f = 0 \\ L\frac{\sin(\pi L f)}{\pi L f} & \text{sinon} \end{cases}$

Transformée de Fourier discrète

- N : nombre d'échantillons
- F_e : fréquence d'échantillonnage
- Fréquences observables : $f[k] = k\dfrac{F_e}{N}$ avec $k = 0, \cdots, N-1$
- Résolution en fréquence : $\Delta f = \dfrac{F_e}{N}$

Transformée de Fourier discrète (TFD)	Transformée de Fourier discrète inverse
$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\ e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$	$x[n] = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\ e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$

Energie et puissances (domaine fréquentiel)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$