Communications numériques

TD 3 : Transmission en bande de base sur un canal à bande passante infinie

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Apprentissage - $2^{\text{ème}}$ année

2018-2019

1 Construction d'un filtre de Nyquist

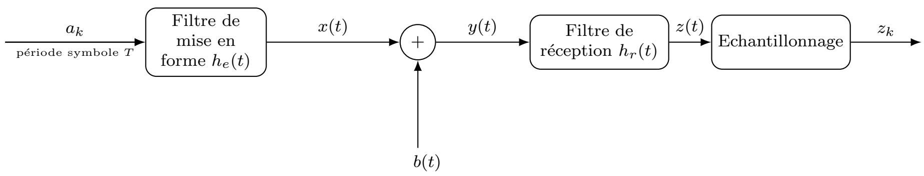
1. On considère un filtre de Nyquist de réponse impulsionnelle $g(t)$ et de fonction de transfert $G(f)$. On suppose que $G(f)$ est réelle et positive. Montrer qu'en utilisant à l'émission le filtre de réponse impulsionnelle $h_e(t) = \mathcal{TF}^{-1}\left\{\sqrt{G(f)}\right\}$ et à la réception le filtre de réponse impulsionnelle $h_r(t) = h_e(t)$, alors le filtre $h = h_e * h_r$ est un filtre de Nyquist.

2. On considère un filtre NRZ défini par sa réponse impulsionnelle

$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que si l'on choisit un filtre d'émission NRZ, et un filtre de réception tel que $h_r(t) = h_e(-t)$, alors le filtre $h = h_e * h_r$ est un filtre de Nyquist.

2 Maximisation du rapport signal sur bruit



On considère la chaîne de transmission en bande de base ci-dessus. On cherche à maximiser le rapport signal sur bruit à la sortie du récepteur, c'est à dire à trouver le filtre de réception $h_r(t)$ permettant de limiter le plus possible l'influence du bruit. Les notations utilisées seront les mêmes que celles du cours : E_{h_e} désigne l'énergie totale du filtre de mise en forme, $h = h_e * h_r$, $n = b * h_r$, et $\frac{N_0}{2}$ la densité spectrale de puissance du bruit blanc gaussien $b(t)$.

1. Calculer $z(t)$ puis $z_k = z(kT)$ en fonction des a_k, de $h(t)$ et $n(t)$. Identifier les différents termes de l'expression.

2. Que devient-elle si l'on suppose que le filtre h est un filtre de Nyquist ? On suppose dans la suite de l'exercice que c'est le cas.

3. On cherche à maximiser nos chances de retrouver a_k à partir de z_k. Pour cela, on va tenter de maximiser le rapport signal sur bruit SNR défini par :

$$SNR = \frac{h(0)^2}{P_n}$$

où P_n est la puissance moyenne totale du signal aléatoire $n(t)$.

   (a) En utilisant la transformée de Fourier inverse, montrer que :

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)df$$

(b) En déduire une expression de $h(0)$ en fonction de $H_e(f)$ et $H_r(f)$.

(c) Calculer la puissance moyenne P_n du bruit $n(t)$ en fonction de N_0 et $H_r(f)$.

(d) En déduire l'expression du rapport signal sur bruit SNR en fonction de $H_e(f)$, $H_r(f)$ et N_0.

4. Notre but est de trouver le filtre $H_r(f)$ qui permet de maximiser ce rapport signal sur bruit. Pour cela, on rappelle l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} c(x)d^*(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |c(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |d(x)|^2 dx\right)$$

On rappelle aussi que l'égalité dans cette équation a lieu si et seulement si $c = \lambda d$ où λ est un réel.

(a) En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, donner une majoration du rapport signal sur bruit en fonction de N_0 et E_{h_e}.

(b) Quelle est la condition sur $H_e(f)$ et $H_r(f)$ pour que le rapport signal sur bruit soit maximal ?

(c) En déduire la condition sur $h_e(t)$ et $h_r(t)$ pour que le rapport signal sur bruit soit maximal.

(d) Quelles sont les valeurs du SNR et de $h(0)$ dans ce cas ?

(e) Quelle est l'expression finale de z_k ?

3 Récepteur optimal

En vous inspirant de l'exercice 1, donner quatre couples de filtres d'émission et de réception formant un récepteur optimal.