Communications numériques

TD 3 : Transmission en bande de base sur un canal à bande passante infinie

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Apprentissage - 2ème année

2017-2018

1 Construction d'un filtre de Nyquist

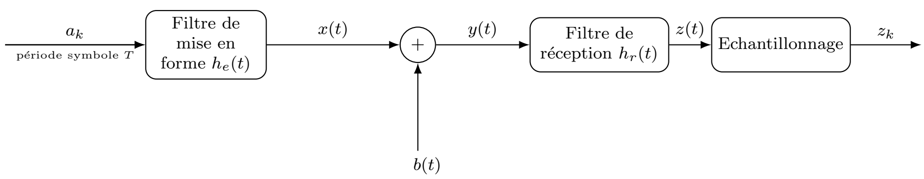
1. On considère un filtre de Nyquist de réponse impulsionnelle $g(t)$ et de fonction de transfert $G(f)$. On suppose que $G(f)$ est réelle et positive. Montrer qu'en utilisant à l'émission le filtre de réponse impulsionnelle $h_e(t) = \mathcal{TF}^{-1}\left\{\sqrt{G(f)}\right\}$ et à la réception le filtre de réponse impulsionnelle $h_r(t) = h_e(t)$, alors le filtre $h = h_e * h_r$ est un filtre de Nyquist.

2. On considère un filtre NRZ défini par sa réponse impulsionnelle

$$h_e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que si l'on choisit un filtre d'émission NRZ, et un filtre de réception tel que $h_r(t) = h_e(-t)$, alors le filtre $h = h_e * h_r$ est un filtre de Nyquist.

2 Maximisation du rapport signal sur bruit



On considère la chaîne de transmission en bande de base ci-dessus. On cherche à maximiser le rapport signal sur bruit à la sortie du récepteur, c'est à dire à trouver le filtre de réception $h_r(t)$ permettant de limiter le plus possible l'influence du bruit. Les notations utilisées seront les mêmes que celles du cours : E_{h_e} désigne l'énergie totale du filtre de mise en forme, $h = h_e * h_r$, $n = b * h_r$, et $\frac{N_0}{2}$ la densité spectrale de puissance du bruit blanc gaussien $b(t)$.

1. Calculer $z(t)$ puis $z_k = z(kT)$ en fonction des a_k, de $h(t)$ et $n(t)$. Identifier les différents termes de l'expression.

2. Que devient-elle si l'on suppose que le filtre h est un filtre de Nyquist ? On suppose dans la suite de l'exercice que c'est le cas.

3. On cherche à maximiser nos chances de retrouver a_k à partir de z_k. Pour cela, on va tenter de maximiser le rapport signal sur bruit SNR défini par :

$$SNR = \frac{h(0)^2}{P_n}$$

où P_n est la puissance moyenne totale du signal aléatoire $n(t)$.

(a) En utilisant la transformée de Fourier inverse, montrer que :

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f)df$$

(b) En déduire une expression de $h(0)$ en fonction de $H_e(f)$ et $H_r(f)$.

(c) Calculer la puissance moyenne P_n du bruit $n(t)$ en fonction de N_0 et $H_r(f)$.

(d) En déduire l'expression du rapport signal sur bruit SNR en fonction de $H_e(f)$, $H_r(f)$ et N_0.

4. Notre but est de trouver le filtre $H_r(f)$ qui permet de maximiser ce rapport signal sur bruit. Pour cela, on rappelle l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} c(x)d^*(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |c(x)|^2dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |d(x)|^2dx\right)$$

On rappelle aussi que l'égalité dans cette équation a lieu si et seulement si $c = \lambda d$ où λ est un réel.

(a) En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, donner une majoration du rapport signal sur bruit en fonction de N_0 et E_{h_e}.

(b) Quelle est la condition sur $H_e(f)$ et $H_r(f)$ pour que le rapport signal sur bruit soit maximal ?

(c) En déduire la condition sur $h_e(t)$ et $h_r(t)$ pour que le rapport signal sur bruit soit maximal.

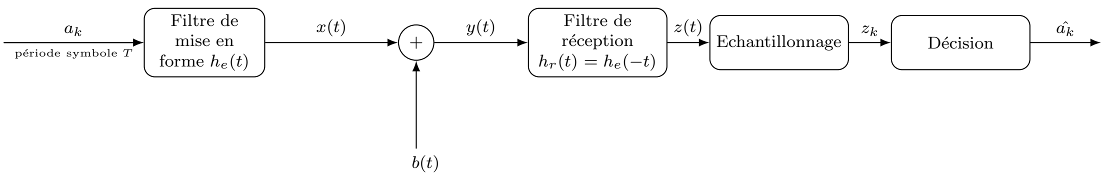
(d) Quelles sont les valeurs du SNR et de $h(0)$ dans ce cas ?

(e) Quelle est l'expression finale de z_k ?

3 Récepteur optimal

En vous inspirant de l'exercice 1, donner quatre couples de filtres d'émission et de réception formant un récepteur optimal.

4 Probabilité d'erreur avec un dictionnaire 2B1Q



On considère une transmission en bande de base avec un dictionnaire 2B1Q ($M = 4$). On suppose que le récepteur est optimal, et que tous les symboles sont équiprobables. On souhaite estimer la probabilité d'erreur par symbole. Les notations utilisées seront les mêmes que celles du cours : E_{h_e} désigne l'énergie totale du filtre de mise en forme, et $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ la densité spectrale de puissance du bruit blanc gaussien $b(t)$.

1. Ecrire z_k en fonction de a_k, E_{h_e} et de $n(t) = (b * h_r)(t)$ (cf exercice 2)

2. Calculer la puissance moyenne $P_n = \sigma_n^2$ du bruit gaussien $n(t)$.

3. Tracer sur une ligne graduée les $M = 4$ valeurs possibles pour le terme déterministe de z_k, et repérer les zones de décision optimales.

4. On rappelle que si x est gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2, on a

$$p(x > \alpha) = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \qquad p(x < \beta) = Q\left(-\frac{\beta}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)$$

$$p(\alpha < x < \beta) = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)$$

(a) Prendre les symboles un par un, et calculer pour chacun la probabilité de détecter correctement le symbole (que z_k soit effectivement dans la zone de décision).

(b) En déduire la probabilité de ne pas faire d'erreur.

(c) En déduire la probabilité d'erreur par symbole.

5. Exprimer E_{bit} en fonction de E_{h_e}. Exprimer finalement la probabilité d'erreur par symbole en fonction de E_{bit} et N_0