# Communications numériques

## Formulaire de traitement du signal

Université Paris 13, Institut Galilée, Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Apprentissage - 2ème année

2017-2018

### Nombres complexes

| | Forme algébrique | Forme polaire |
|---|---|---|
| **Définition** | $z = x + jy$<br>$x$ : partie réelle<br>$y$ : partie imaginaire | $z = re^{j\theta}$<br>$r$ : module<br>$\theta$ : argument |
| **Conjugué** | $z^* = x - jy$ | $z^* = re^{-j\theta}$ |

$$|z\,z'| = |z|\,|z'| \qquad |z|^2 = z\,z^* \qquad \left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{|z|^2}$$

### Formules d'Euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x) \qquad \cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

### Décibels

| **Echelle linaire $X$** | **Echelle en décibels $X_{dB}$** |
|---|---|
| $X = 10^{\frac{X_{dB}}{10}}$ | $X_{dB} = 10\log_{10}(X)$ |

$$\log_{10}(10^x) = 10x \qquad 10\log_{10}(xy) = 10\log_{10}(x) + 10\log_{10}(y) \qquad 10\log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) = 10\log_{10}(x) - 10\log_{10}(y)$$

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_{dB}$ | 0 | 3 | 4.8 | 6 | 7 | 7.8 | 8.5 | 9 | 9.5 |

## Distribution de Dirac

| | |
|---|---|
| **Définition** | $\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ |
| **Intégration** | $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ |
| **Produit** | $x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\, \delta(t - t_0)$ |
| **Produit de convolution** | $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ |

## Produit de convolution

| | **Cas continu** | **Cas discret** |
|---|---|---|
| **Définition** | $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)\, g(\tau) d\tau$ | $(f * g)_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{n-m}\, g_m$ |
| **Commutativité** | $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ | $(f * g)_n = (g * f)_n$ |
| **Distributivité** | $f(t)*[g(t) + h(t)] = (f*g)(t)+(f*h)(t)$ | $f_n * (g_n + h_n) = (f * g)_n + (f * h)_n$ |
| **Associativité** | $f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t)$ | $f_n * (g_n * h_n) = (f_n * g_n) * h_n$ |

## Energie et puissances (domaine temporel)

| | **Cas continu** | **Cas discret** |
|---|---|---|
| **Energie totale** | $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$ | $E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x_n\rvert^2$ |
| **Puissance moyenne totale** | $P_x = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \lvert x(t)\rvert^2 dt$ | $P_x = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{2m+1} \sum_{n=-m}^{m} \lvert x_n\rvert^2$ |
| **Puissance moyenne totale (cas périodique)** | $\forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad P_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \lvert x(t)\rvert^2 dt$ | $\forall n_0 \in \mathbb{Z}, \quad P_x = \frac{1}{M} \sum_{n=n_0}^{n_0+M-1} \lvert x_n\rvert^2$ |

## Transformée de Fourier

| Domaine temporel | Domaine fréquentiel |
|---|---|
| $x(t)$ | $X(f)$ |
| Transformée de Fourier inverse $x(t) = \mathcal{TF}^{-1}\left\{X(f)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft}df$ | Transformée de Fourier $X(f) = \mathcal{TF}\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft}dt$ |
| $\lambda x(t) + \mu y(t)$ | $\lambda X(f) + \mu Y(f)$ |
| $x(t) \times y(t)$ | $X(f) * Y(f)$ |
| $x(t) * y(t)$ | $X(f) \times Y(f)$ |
| $x(t - t_0)$ | $X(f)\ e^{-j2\pi ft_0}$ |
| $x(t)\ e^{j2\pi f_0 t}$ | $X(f - f_0)$ |
| $x(t) \in \mathbb{R}$ | $X(-f) = X^*(f)$, $\lvert X(-f)\rvert = X(f)$, $\arg\left\{X(-f)\right\} = -\arg\left\{X(f)\right\}$ |
| $x(t)$ réel et pair | $X(f)$ réelle et paire |
| $x(t)$ périodique de période $T$ | $X(f)$ discret défini pour $f = \frac{n}{T}$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $1$ | $\delta(f)$ |
| $\delta(t - t_0)$ | $e^{-j2\pi ft_0}$ |
| $e^{j2\pi f_0 t}$ | $\delta(f - f_0)$ |
| $\cos\left(2\pi f_0 t\right)$ | $\dfrac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$ |
| $\sin\left(2\pi f_0 t\right)$ | $\dfrac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}$ |
| Signal porte centré de durée $L$ $\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ | $L\,\mathrm{sinc}\left(Lf\right) = \begin{cases} L & \text{si } f = 0 \\ L\frac{\sin(\pi Lf)}{\pi Lf} & \text{sinon} \end{cases}$ |
| Sinus cardinal normalisé $\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}$ | $\Pi_1(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ |
| Peigne de Dirac $\text{Ш}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ | $\frac{1}{T}\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ |

## Transformée de Fourier discrète

- $N$ : nombre d'échantillons
- $F_s$ : fréquence d'échantillonnage
- Fréquences observables : $f_k = k\frac{F_s}{N}$ avec $k = 0, \cdots, N-1$
- Résolution en fréquence : $\Delta f = \frac{F_s}{N}$

| **Transformée de Fourier discrète (TFD)** | **Transformée de Fourier discrète inverse** |
|---|---|
| $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \; e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$ | $x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \; e^{j2\pi\frac{kn}{N}}$ |

## Energie et puissances (domaine fréquentiel)

| | **Signaux déterministes** | **Signaux aléatoires** |
|---|---|---|
| **Energie totale** | $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(f)\|^2 df$<br>$\|X(f)\|^2$ : densité spectrale d'énergie | |
| **Puissance moyenne totale** | | $P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df$<br>$\Gamma_x(f)$ : densité spectrale de puissance |
| **Sortie d'un filtre**<br>$y = x * h$ | $\|Y(f)\|^2 = \|H(f)\|^2 \; \|X(f)\|^2$ | $\Gamma_y(f) = \|H(f)\|^2 \; \Gamma_x(f)$ |

## Densités spectrales de puissance usuelles

| **Signaux** | **Densités spectrales de puissance** |
|---|---|
| Bruit blanc $b(t)$ de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$ | $\Gamma_b(f) = \sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ |
| Emission de symboles aléatoires tirés uniformément toutes les $T$ secondes<br>$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(t - kT)$ | $\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$<br>avec $\mu_a, \sigma_a^2$: moyenne et variance des symboles du dictionnaire |