Communications numériques

Modulations numériques

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Apprentissage - 2$^{\text{ème}}$ année
2018-2019

Sommaire

Sommaire

Transmission en bande de base

- Pour le moment, tous les signaux physiques générés ont une largeur de bande que l'on peut écrire :
  - filtre NRZ : $B \approx \frac{1}{T}$
  - filtre RZ : $B \approx \frac{2}{T}$
  - filtre biphase Manchester : $B \approx \frac{2}{T}$
  - filtre en racine de cosinus surelevé : $B = \frac{1+\beta}{2T}$
- On a vu en TP que B dépendait du filtre de mise en forme $h_e(t)$, du débit binaire D_b, et de la taille M de l'alphabet utilisé
- Les densités spectrales de puissance des signaux en bande de base sont centrées sur la fréquence $f_0 = 0$.
- Si le canal a une bande passante limitée, on cale la largeur de bande occupée du signal sur les caractéristiques du canal : on utilise toute la bande passante disponible.

Limites de la bande de base

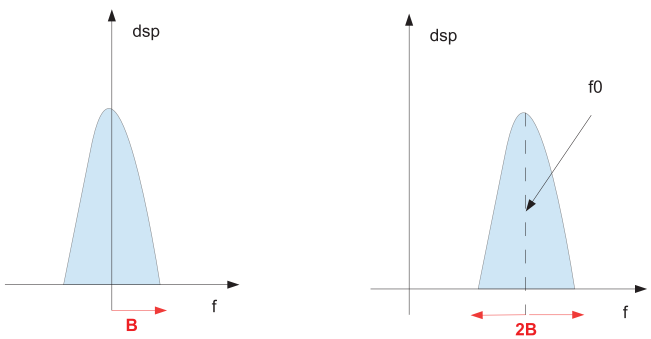
- Impossible de diviser le canal en sous-canaux pour transmettre plusieurs communications à la fois (multiplexage fréquentiel)
- Impossible de créer une onde électromagnétique pour la transmission sans fil (si on émet une onde à 30 Hz, on a une longueur d'onde de 10000 km !)
- Chaque type de communication correspond à une bande de fréquence répertoriée :
  - TNT terrestre : 470 MHz à 830 MHz
  - GSM (900) : 880 MHz à 960 MHz
- Nécessité de pouvoir créer des signaux dans une bande de fréquence donnée
- Les caractéristiques de cette bande dépendent du canal où l'on veut transmettre et du type de communication

Bande de base vs. Modulation

- Bande de base
  - Transmission des signaux dans leur bande de fréquence originale
  - Utilisation de la totalité de la bande passante du canal BP
  - Signaux électriques et lumineux : câbles USB, Ethernet, fibres optiques, etc...
- Bande transposée (ou large de bande)
  - Transmission des signaux dans une bande de fréquence donnée
  - Eventuellement, division de la bande passante disponible en plusieurs canaux
  - Ondes électromagnétiques, signaux électriques et optiques : réseau hertzien, infra-rouge, laser, câbles ADSL, etc...

Modulation : transformation du signal en bande de base pour l'adapter au canal de transmission

Bande de base vs. Modulation



Bande de base   Bande transposée

Attention, si la largeur de bande en bande de base est (par exemple) $\frac{1}{T}$, alors en bande modulée, cela correspond à une largeur de bande $\frac{2}{T}$ (et inversement)

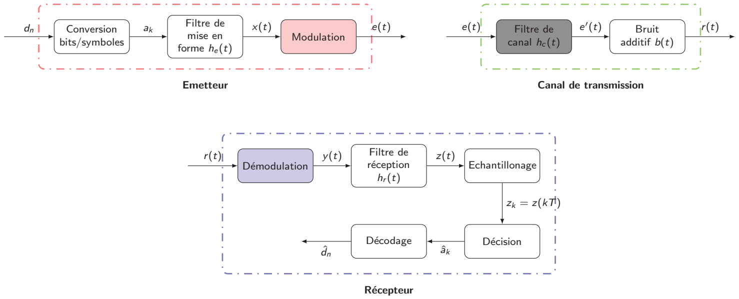
$$B_{MOD} = 2B_{BB}$$

Bande de base vs. Modulation

Imaginons que l'on souhaite envoyer un signal sur un canal de bande passante $[BP_{min} BP_{max}]$:

- On veut créer un signal modulé ayant comme largeur de bande (en bande modulée) $B_{MOD} = BP_{max} - BP_{min}$ et centré sur la fréquence $f_0 = \frac{BP_{min}+BP_{max}}{2}$
- Cela revient à créer un signal en bande de base ayant comme largeur de bande (en bande de base) $B_{BB} = \frac{BP_{max}-BP_{min}}{2}$ puis translater son spectre de f_0

Modulations numériques



- Modulation : partir d'un signal $x(t)$ en bande de base, et le transformer en signal $e(t)$ en bande modulée, donc la largeur de bande sera centrée sur f_0.
- Démodulation : processus inverse

Principe de la modulation

Imaginons que l'on ait un signal $x(t)$ avec une densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$ centrée en $f = 0$. Comment la translater pour la centrer en $f = f_0$?

- cf TD 1 : $\mathcal{TF}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\} = X(f - f_0)$
- Proposition : prendre $e(t) = x(t)e^{2\pi j f_0 t}$? ?
- Problème : dans ce cas, $e(t)$ est complexe, ce qui n'est pas possible (ce doit être un signal physique)

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

- $e^{2\pi j f_0 t}$: porteuse
- $x(t)$: signal en bande de base (dans ce cours : filtre d'émission NRZ)

Sommaire

Modulation par déplacement d'amplitude : ASK

On modifie l'amplitude de la porteuse : Amplitude Shift Keying

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

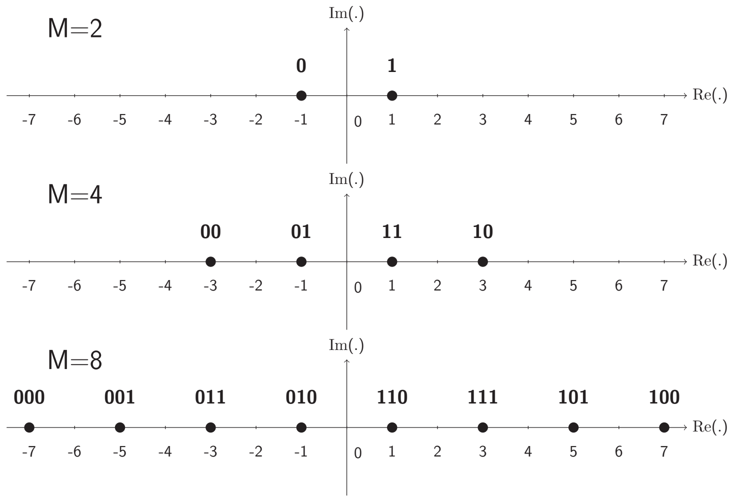
Si on suppose que les a_k sont réels, et que $h_e(t)$ est réelle (c'est le cas si on considère un filtre NRZ), alors $x(t)$ est réel et :

$$e(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t - kT)\cos(2\pi f_0 t)$$

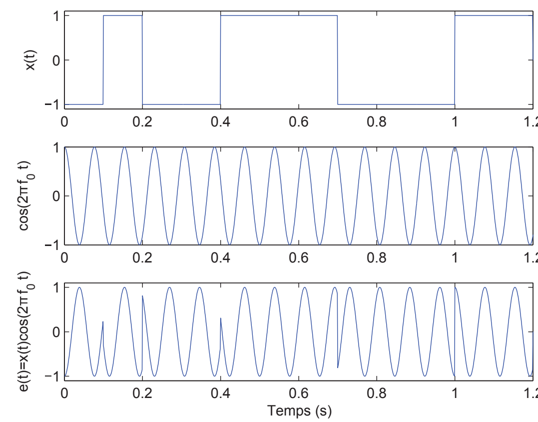
- On ne transforme pas notre signal en bande de base, on le multiplie juste par un cosinus
- Chaque symbole a_k modifie l'amplitude de la porteuse durant une durée T : a_k correspond à l'amplitude de la porteuse pour $kT \leq t < (k+1)T$
- En fait, tous les codages en ligne que l'on a vu en bande de base étaient des modulations ASK avec $f_0 = 0$!

Modulation M-ASK symétriques



$\longrightarrow x(t)$ codé avec un dictionnaire M-aire antipolaire

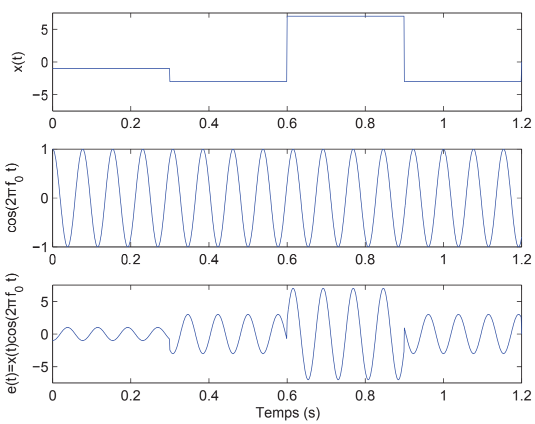
2-ASK symétrique - Filtre NRZ



d_n = 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 $\longrightarrow$ a_k = -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 1 1

f_0 = 13 Hz et Db=10 bits/seconde

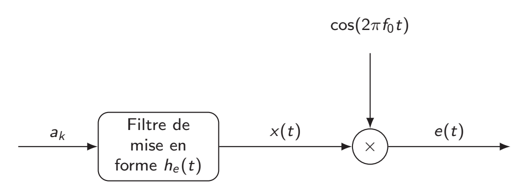
8-ASK symétrique - Filtre NRZ



d_n = 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 $\longrightarrow$ a_k = -1 -3 7 -3

f_0 = 13 Hz et Db=10 bits/seconde

Modulateur

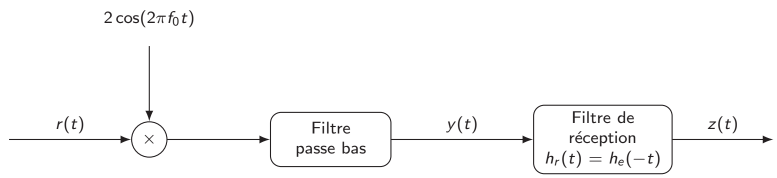


$$e(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t-kT)\cos(2\pi f_0 t)$$

Démodulateur

- A la sortie du canal (sans bruit), on a $r(t) = e(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$
- Comment retrouver $x(t)$ à partir de $r(t)$?
- On utilise $2\cos(2\pi f_0 t) r(t) = 2\cos^2(2\pi f_0 t) x(t) = x(t) + x(t)\cos(4\pi f_0 t)$
- Avec un filtrage passe-bas, on peut récupérer $x(t)$!



Energie moyenne par bit

- L'énergie moyenne par bit pour un signal modulé avec une modulation M-ASK est exactement la même que celle que l'on aurait pour un signal en bande de base
- On peut donc utiliser les mêmes formules qu'en bande de base

$$E_{sym} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e}$$

$$E_{bit} = \frac{1}{M \log_2 M} \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 E_{h_e}$$

Probabilité d'erreur binaire

Si on utilise un codage de Grey et si le récepteur est optimal, on peut montrer que

$$TEB \approx 2\frac{M-1}{M \log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0}\frac{3\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

- Il s'agit de la même formule qu'en bande de base !
- Si on utilise un filtre NRZ, alors $B_{MOD} = 2B_{BB} = \frac{2}{T}$ (attention, on n'est plus en bande de base !), et on a donc $\eta = \frac{\log_2 M}{2}$. Plus M augmente, plus η augmente.
- En revanche, quand M augmente, le TEB augmente. Il y a donc un compromis à réaliser.

Sommaire

Modulation par déplacement de phase : PSK

- Pour la modulation ASK on a modifié l'amplitude de la porteuse

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t-kT)\cos(2\pi f_0 t)$$

- a_k correspond à l'amplitude de la porteuse pour $kT \leq t < (k+1)T$
- Et si on modifiait la phase au lieu de l'amplitude ?
- PSK : Phase Shift Keying
- On fait passer le signal $x(t)$ sur la phase de la porteuse

Modulation par déplacement de phase : PSK

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{e^{2\pi j f_0 t + jx(t)}\right\}$$

- Si on suppose que les a_k sont réels, et que $h_e(t)$ est réelle (c'est le cas si on considère un filtre NRZ), alors $x(t)$ est réel et :

$$e(t) = \cos(2\pi f_0 t + x(t))$$

$$e(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t-kT)\right)$$

- a_k correspond à la phase de la porteuse pour $kT \leq t < (k+1)T$
- L'amplitude de la porteuse reste constante, mais la phase change toutes les T secondes

Choix des symboles

Les a_k représentent ici une phase et il est courant de les renormaliser entre 0 et 2π. Au lieu de prendre les dictionnaires unipolaire et antipolaires classiques, on va prendre

- soit

$$a_k \in \frac{2\pi}{M}\{0, 1, \cdots, M-1\} \text{ (unipolaire)}$$

- soit

$$a_k \in \frac{\pi}{M}\{-(M-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, M-1\} \text{ (antipolaire)}$$

Modulation ASK équivalente

Comme $h_e(t)$ est un filtre NRZ, on peut montrer que :

$$e(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t-kT)\right)$$

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(2\pi f_0 t + a_k) h_e(t-kT)$$

Avec des formules de trigonométrie, cela peut s'écrire

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t-kT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t-kT)\sin(2\pi f_0 t)$$

Modulation ASK équivalente

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t-kT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t-kT)\sin(2\pi f_0 t)$$

$e(t)$ est la somme de deux signaux ASK :

- Un premier signal
$$I(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t-kT)$$
modulé par une porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ (les symboles sont ici les $\cos(a_k)$)
- Un deuxième signal
$$Q(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t-kT)$$
modulé par une porteuse $-\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2})$ (les symboles sont ici les $\sin(a_k)$)
- $I(t)$: composante en phase (Inphase), $Q(t)$: composante en quadrature de phase (Quadrature)

$$\boxed{e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

Modulation ASK équivalente

En repartant de l'expression

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{e^{2\pi j f_0 t + j x(t)}\right\}$$

on peut observer que

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{e^{2\pi j f_0 t + j\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k h_e(t-kT)}\right\}$$

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{j a_k} h_e(t-kT) e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

- Cette modulation PSK avec les symboles a_k est mathématiquement équivalente à une modulation ASK avec les symboles $\alpha_k = e^{j a_k}$
- α_k : symboles équivalents en modulation ASK

Formulations équivalentes

Nous avons donc trois formulations parfaitement équivalentes :

$$e(t) = \cos(2\pi f_0 t + x(t))$$

- Faire passer les a_k sur la phase de la porteuse
- Porteuse d'amplitude $m(t) = 1$ constante et de phase $\phi(t) = x(t)$

$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

- Faire passer les $\cos(a_k)$ sur une porteuse en phase et les $\sin(a_k)$ sur une porteuse en quadrature de phase
- Composante en phase $I(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t-kT)$, composante en quadrature de phase $Q(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t-kT)$

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{j a_k} h_e(t-kT) e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

- Transmettre les symboles complexes $\alpha_k = e^{j a_k}$ en modulation ASK

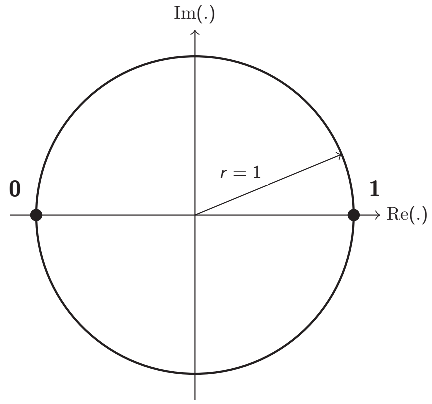
Constellation

Constellation

Constellation : représentation des symboles α_k équivalents en modulation ASK dans le plan complexe

- Dans le cas ASK, on a $\alpha_k = a_k$ et les α_k sont réels
- Dans le cas PSK, les $\alpha_k = e^{j a_k}$ sont sur le cercle unité

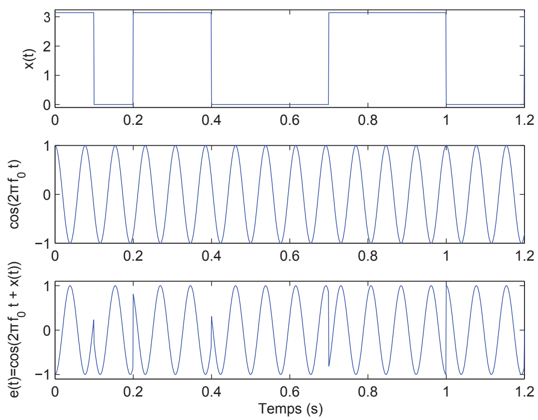
2-PSK ou BPSK



$$a_k \in \{0, \pi\} \longrightarrow \alpha_k = \pm 1$$

Exactement pareil qu'une modulation 2-ASK symétrique !

2-PSK ou BPSK - Filtre NRZ



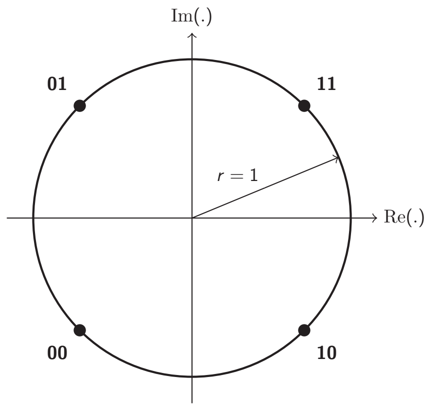
d_n = 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1

$a_k = \pi\ 0\ \pi\ \pi\ 0\ 0\ 0\ \pi\ \pi\ \pi\ 0\ 0$

α_k= 1-11-1-1-111-11

f_0 = 13 Hz et Db=10 bits/seconde

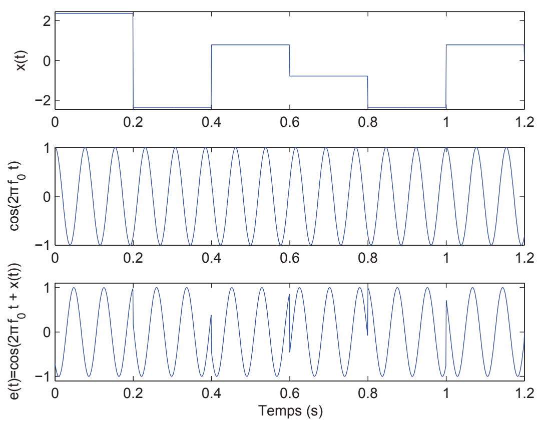
4-PSK ou QPSK



$$a_k \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\} \longrightarrow \alpha_k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ici on a utilisé le dictionnaire antipolaire : on obtient le dictionnaire unipolaire en faisant tourner la constellation de $-\frac{\pi}{4}$.

4-PSK ou QPSK - Filtre NRZ



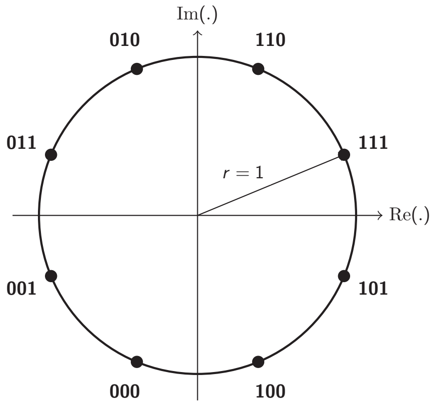
d_n = 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1

$a_k = \frac{3\pi}{4}\ \frac{-3\pi}{4}\ \frac{\pi}{4}\ \frac{-\pi}{4}\ \frac{-3\pi}{4}\ \frac{\pi}{4}$

$\alpha_k = \frac{-\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}\ \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}\ \frac{-\sqrt{2}-j\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2}+j\sqrt{2}}{2}$

f_0 = 13 Hz et Db=10 bits/seconde

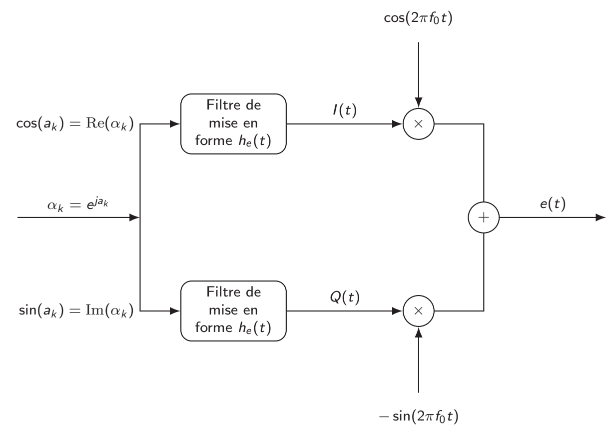
8-PSK



$$a_k \in \left\{ -\frac{7\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}$$

Ici on a utilisé le dictionnaire antipolaire : on obtient le dictionnaire unipolaire en faisant tourner la constellation de $-\frac{\pi}{8}$.

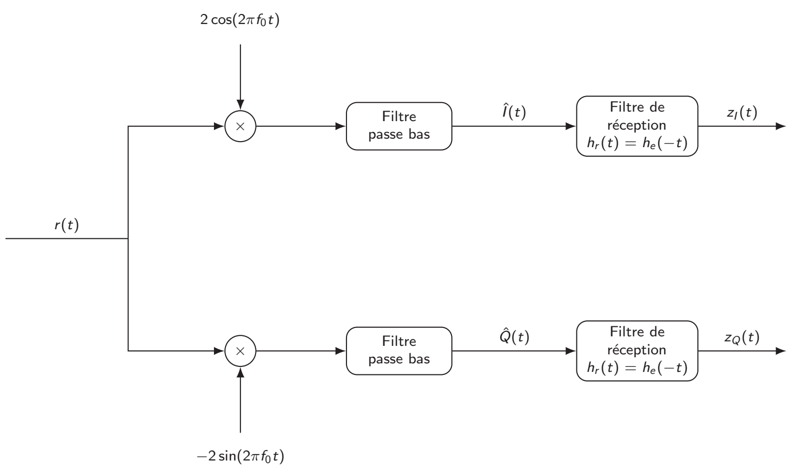
Modulateur



$$I(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \cos(a_k) h_e(t - kT) \qquad Q(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin(a_k) h_e(t - kT)$$

$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Démodulateur



$$2\cos(2\pi f_0 t) r(t) = I(t) + I(t)\cos(4\pi f_0 t) - Q(t)\sin(4\pi f_0 t)$$
$$-2\sin(2\pi f_0 t) r(t) = Q(t) - I(t)\sin(4\pi f_0 t) - Q(t)\cos(4\pi f_0 t)$$

Après un filtrage passe-bas, on retrouve $I(t)$ et $Q(t)$, puis en échantillonnant $\cos(a_k)$ et $\sin(a_k)$, et enfin a_k

Energie moyenne par bit

- Pour calculer l'énergie moyenne par bit, on utilise les symboles α_i équivalents en modulation ASK.
- Tous ces symboles sont complexes, mais sont situés sur le cercle unité. On a donc
$$|\alpha_i|^2 = 1$$
pour tous les symboles
- On a donc
$$E_{bit} = \frac{1}{\log_2 M} E_{h_e}$$

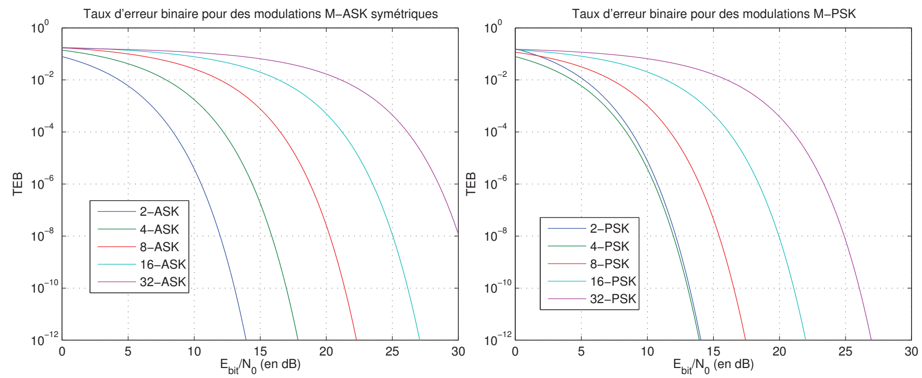
Probabilité d'erreur binaire

Si on utilise un codage de Grey et si le récepteur est optimal, on peut montrer que si $M > 2$

$$TEB \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2\log_2 M E_{bit}}{N_0}}\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)$$

- Si on utilise un filtre NRZ, alors $B = \frac{2}{T}$ (attention, on n'est plus en bande de base !), et on a donc $\eta = \frac{\log_2 M}{2}$. Plus M augmente, plus η augmente.
- En revanche, quand M augmente, le TEB augmente.

Comparaison ASK / PSK



- A TEB fixé, on peut transmettre avec M plus grand avec une M-PSK qu'avec une M-ASK
- En revanche, les modulateurs et démodulateurs sont plus complexes à réaliser avec une M-PSK

Sommaire

Modulations APSK

- Modification de l'amplitude (ASK) :
  - a_k modifie l'amplitude toutes les T secondes
  - Symboles équivalents en modulation ASK : $\alpha_k = a_k$ réels
- Modification de la phase (PSK) :
  - a_k modifie la phase toutes les T secondes
  - Symboles équivalents en modulation ASK : $\alpha_k = e^{ja_k}$ sur le cercle unité
- Si l'on veut modifier simultanément l'amplitude et la phase toutes les T secondes ?
- Amplitude and Phase Shift Keying (APSK)

Modulations APSK : principe

A chaque période symbole T, on change l'amplitude m_k et la phase Φ_k de la porteuse

$$\boxed{e(t) = m(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \Phi(t)\right)}$$

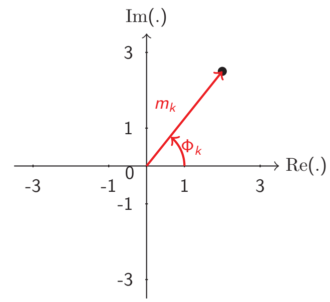
- $m(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k h_e(t - kT)$
- $\Phi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_k h_e(t - kT)$

A chaque période symbole T on agit sur deux paramètres au lieu d'un, ce qui revient à une mise au carré du nombre de symboles possibles

Modulations APSK : constellation

Modification conjointe de l'amplitude et de la phase : peut être vue mathématiquement comme la transmission de symboles α_k complexes en ASK tels que

$$\alpha_k = m_k e^{j\phi_k}$$



Remarque : ASK revient à $m_k = a_k, \Phi_k = 0$ et PSK à $m_k = 0, \Phi_k = a_k$

Modulations APSK : amplitudes et phases

Par définition des symboles équivalents en modulation ASK,

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_e(t - kT)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

Comme $\alpha_k = m_k e^{j\phi_k}$, on peut montrer que :

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k h_e(t - kT)\cos\left(2\pi f_0 t + \phi_k\right)$$

On a donc :

$$\boxed{m(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| h_e(t - kT)}$$

$$\boxed{\Phi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \arg(\alpha_k) h_e(t - kT)}$$

- $m(t)$ transmet le module du symbole
- $\Phi(t)$ transmet l'argument du symbole

Modulations APSK : composantes en phase et en quadrature de phase

Par définition des symboles équivalents en modulation ASK,

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_e(t - kT)e^{2\pi j f_0 t}\right\}$$

Et on a par définition de $I(t)$ et $Q(t)$

$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

On peut montrer alors que :

$$\boxed{I(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}(\alpha_k) h_e(t - kT)}$$

$$\boxed{Q(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Im}(\alpha_k) h_e(t - kT)}$$

- $I(t)$ transmet la partie réelle du symbole
- $Q(t)$ transmet la partie imaginaire du symbole

Modulations QAM

Cas particulier courant :

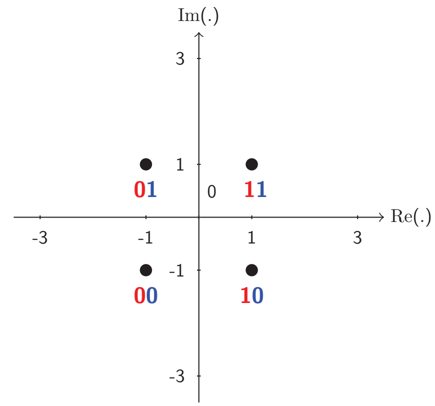
$$\mathrm{Re}(\alpha_k) \in \left\{-(\sqrt{M}-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, \sqrt{M}-1\right\} \text{ dictionnaire antipolaire}$$

$$\mathrm{Im}(\alpha_k) \in \left\{-(\sqrt{M}-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, \sqrt{M}-1\right\} \text{ dictionnaire antipolaire}$$

$$\alpha_k \in \{\pm 1 \pm j, \pm 1 \pm 3j, \pm 3 \pm j, \pm 3 \pm 3j, \ldots\}$$

- Si chaque dictionnaire contient $\sqrt{M}$ symboles réels, cela fait M symboles complexes !
- Comme si on transmettait simultanément un signal $\sqrt{M}$-ASK symétrique réel et un signal $\sqrt{M}$-ASK symétrique imaginaire pur
- Deux signaux $\sqrt{M}$-ASK symétriques $I(t)$ et $Q(t)$ en quadrature de phase : d'ou le nom Quadrature Amplitude Modulation

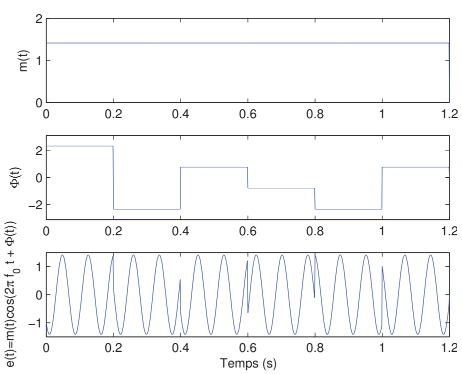
Modulation 4-QAM



$$\alpha_k = \pm 1 \pm j$$

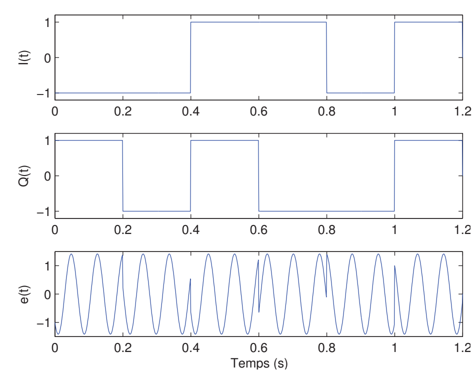
code la partie réelle - code la partie imaginaire

4-QAM - Filtre NRZ - $m(t)/\Phi(t)$



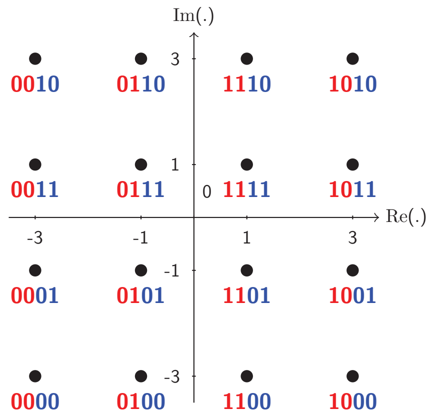
$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$
$$\alpha_k = \text{-1+j} \quad \text{-1-j} \quad \text{1+j} \quad \text{1-j} \quad \text{-1-j} \quad \text{1+j}$$
$$m_k = \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad \sqrt{2}$$
$$\Phi_k = \frac{3\pi}{4} \quad \frac{-3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{-\pi}{4} \quad \frac{-3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{4}$$
$$f_0 = 13 \text{ Hz et } Db\text{=10 bits/seconde}$$

4-QAM - Filtre NRZ - $I(t)/Q(t)$



$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$
$$\alpha_k = \text{-1+j} \quad \text{-1-j} \quad \text{1+j} \quad \text{1-j} \quad \text{-1-j} \quad \text{1+j}$$
$$f_0 = 13 \text{ Hz et } Db\text{=10 bits/seconde}$$

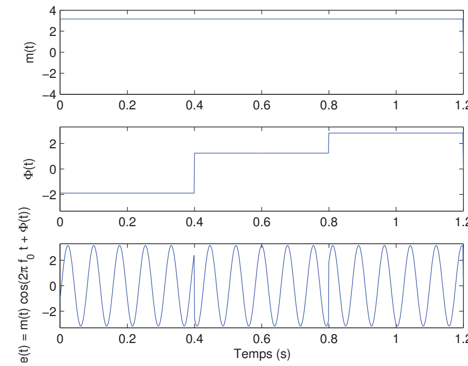
Modulation 16-QAM



$$\alpha_k \in \{\pm 1 \pm j, \pm 1 \pm 3j, \pm 3 \pm j, \pm 3 \pm 3j\}$$

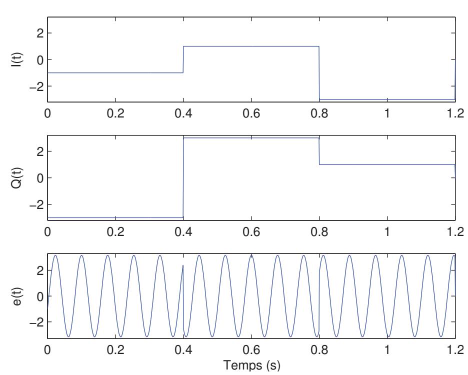
code la partie réelle - code la partie imaginaire

16-QAM - Filtre NRZ - $m(t)/\Phi(t)$



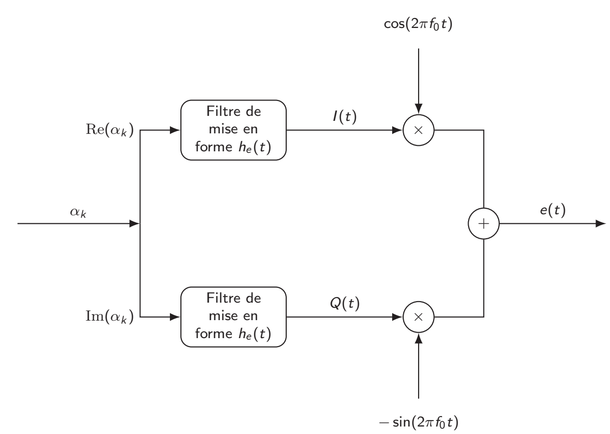
$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$
$$\alpha_k = \text{-1-3j} \quad \text{1+3j} \quad \text{-3+j}$$
$$m_k = \sqrt{10} \quad \sqrt{10} \quad \sqrt{10}$$
$$\Phi_k = \frac{-\pi}{2} - atan(\tfrac{1}{3}) \quad \frac{\pi}{2} - atan(\tfrac{1}{3}) \quad \pi - atan(\tfrac{1}{3})$$
$$f_0 = 13 \text{ Hz et } Db\text{=10 bits/seconde}$$

16-QAM - Filtre NRZ - $I(t)/Q(t)$



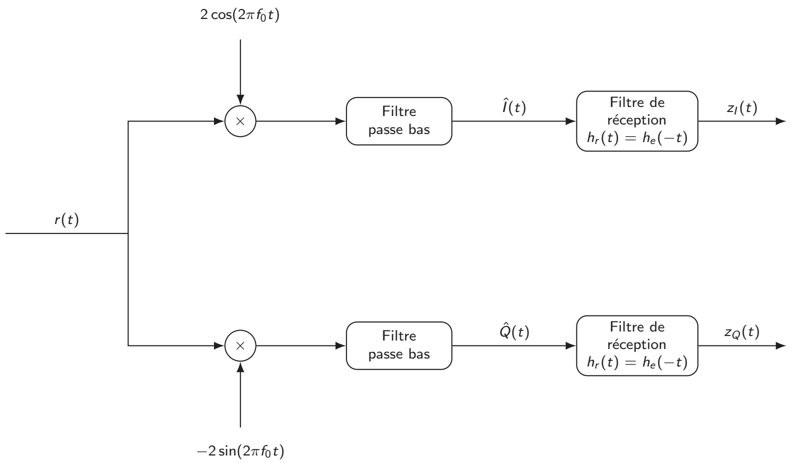
$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$
$$\alpha_k = \text{-1-3j} \quad \text{1+3j} \quad \text{-3+j}$$
$$f_0 = 13 \text{ Hz et } Db\text{=10 bits/seconde}$$

Modulateur



$$I(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Re}(\alpha_k) h_e(t-kT) \qquad Q(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Im}(\alpha_k) h_e(t-kT)$$
$$e(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Démodulateur



$$2\cos(2\pi f_0 t)e(t) = I(t) + I(t)\cos(4\pi f_0 t) - Q(t)\sin(4\pi f_0 t)$$
$$-2\sin(2\pi f_0 t)e(t) = Q(t) - I(t)\sin(4\pi f_0 t) - Q(t)\cos(4\pi f_0 t)$$

Après un filtrage passe-bas, on retrouve $I(t)$ et $Q(t)$, puis en échantillonnant $\mathrm{Re}(\alpha_k)$ et $\mathrm{Im}(\alpha_k)$, et enfin α_k

Energie moyenne par bit

- Pour calculer l'énergie moyenne par bit il faut utiliser les symboles α_i équivalents en modulation ASK
- On peut démontrer que l'énergie moyenne par bit d'une modulation M-QAM est exactement la même que celle d'une modulation $\sqrt{M}$-ASK
- En réalité, une modulation M-QAM correspond à deux modulations $\sqrt{M}$-ASK indépendantes en parallèle

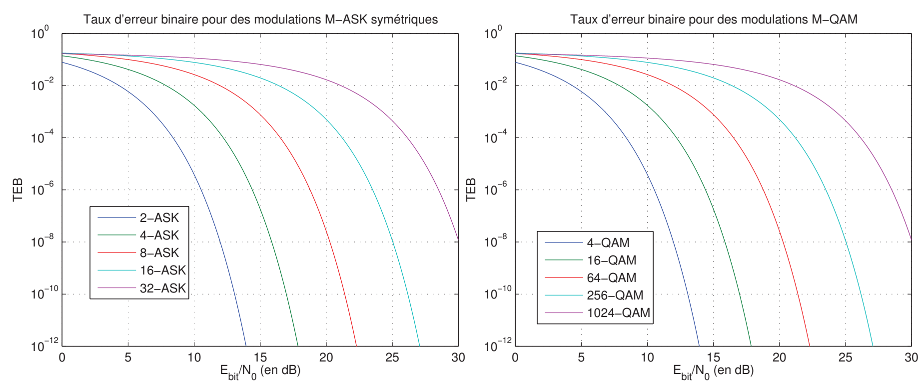
Probabilité d'erreur binaire

Si on utilise un codage de Grey et si le récepteur est optimal, on peut montrer que

$$TEB \approx 2\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}\log_2\sqrt{M}}\, Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bit}}{N_0}\frac{3\log_2\sqrt{M}}{M-1}}\right)$$

- Comme si on avait deux modulations $\sqrt{M}$-ASK indépendantes !
- Si on utilise un filtre NRZ, alors $B = \frac{2}{T}$ (attention, on n'est plus en bande de base !), et on a donc $\eta = \frac{\log_2 M}{2}$. Plus M augmente, plus η augmente.
- En revanche, quand M augmente, le TEB augmente.

Comparaison ASK / QAM



- On peut transmettre avec une M-QAM pour le même taux d'erreur binaire qu'une $\sqrt{M}$-ASK symétrique !
- En revanche, les modulateurs et démodulateurs sont plus complexes à réaliser avec une M-QAM

Bilan

Notions importantes

- $m(t)$: amplitude
- $\Phi(t)$: phase
- $I(t)$: composante en phase
- $Q(t)$: composante en quadrature de phase

Modulations

	ASK	PSK	QAM
$m(t)$	a_k	1	$\lvert\alpha_k\rvert$
$\Phi(t)$	0	a_k	$\arg(\alpha_k)$
$I(t)$	a_k	$\cos(a_k)$	$\mathrm{Re}(\alpha_k)$
$Q(t)$	0	$\sin(a_k)$	$\mathrm{Im}(\alpha_k)$

Sommaire

Modulation par déplacement de fréquence : FSK

On a déjà modifié l'amplitude et la phase de la porteuse, cette fois ci on va modifier la fréquence fondamentale de la porteuse : Frequency Shift Keying

$$e(t) = \mathrm{Re}\left\{e^{2\pi j t(f_0 + x(t))}\right\}$$

Ce qui revient à

$$e(t) = \cos\left(2\pi\left(f_0 + x(t)\right)t\right)$$

- Dans le cas d'un filtre de mise en forme $h_e(t)$ NRZ, cela devient

$$e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos\left(2\pi\left(f_0 + a_k\right)t\right) h_e(t - kT)$$

- On change la fréquence fondamentale de la porteuse tous les T, en fonction des symboles a_k : la fréquence fondamentale pour $kT \leq t < (k+1)T$ est $f_0 + a_k$

Choix des symboles

Dans le cas d'une modulation FSK à M symboles, les a_k doivent être homogènes à une fréquence et on choisit un dictionnaire antipolaire :

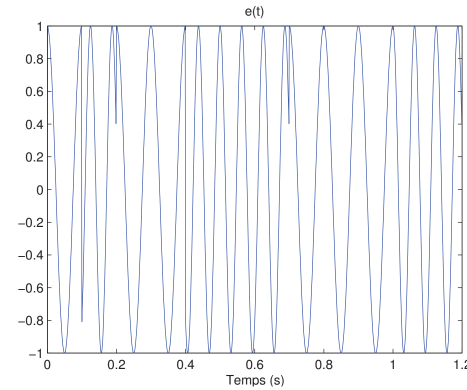
$$a_k \in \frac{\Delta f}{2}\left\{-(M-1), \cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots, M-1\right\}$$

- f_0 est donc la fréquence centrale
- Δf est l'excursion de fréquence

Modulation FSK

- Dans la suite du cours on suppose que $M = 2$ (cas 2-FSK, souvent appelé simplement FSK)
- On a donc 2 fréquences fondamentales possibles :
  - $f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2}$
  - $f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2}$
- On a donc
$$f_2 - f_1 = \Delta f$$
- Plus on réduit Δf, moins on utilise de bande passante
- Indice de modulation
$$\mu = \Delta f \ T$$
- Plus μ est petit, moins on utilise de bande passante

FSK non cohérente



$$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$$

$f_0 = 13$ Hz, Db=10 bits/seconde, $\Delta f = 6$ Hz ($f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 16$ Hz)

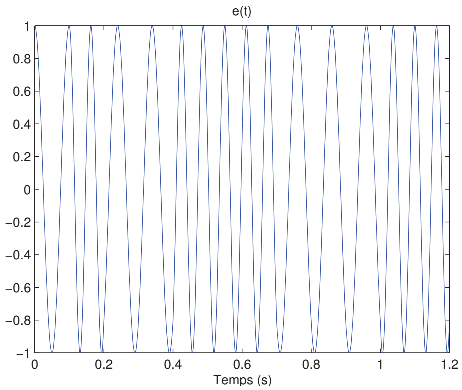
FSK cohérente et non cohérente

- Problème : il y a un saut tous les T quand la fréquence change : FSK non cohérente
- Ces sauts créent des fréquences parasites sur le spectre du signal modulé
- On peut transformer $x(t)$ pour que la phase soit continue dans le temps : FSK cohérente (ou CPFSK)
  - Plus difficile à réaliser en pratique
  - Permet de réduire l'occupation spectrale

FSK cohérente

- Pour une FSK non cohérente, on a
$$e(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$
avec
$$\phi(t) = 2\pi a_k t \text{ pour } t \in [kT; (k+1)T[$$
- Pour une FSK cohérente, on va poser
$$\phi(t) = 2\pi a_k (t - kT) + \phi_k \text{ pour } t \in [kT; (k+1)T[$$
- La condition de continuité donne
$$2\pi a_{k+1}((k+1)T - (k+1)T) + \phi_{k+1} = 2\pi a_k((k+1)T - kT) + \phi_k$$
$$\phi_{k+1} = 2\pi a_k T + \phi_k$$

2-FSK cohérente



$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$

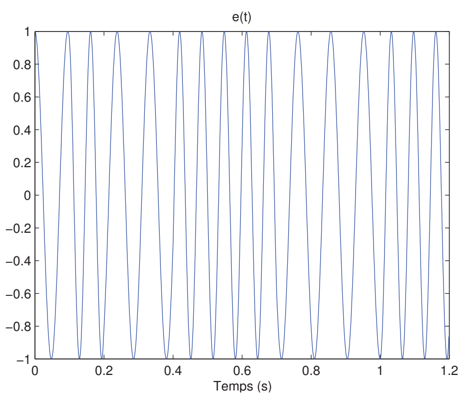
$f_0 = 13$ Hz, Db=10 bits/seconde, $\Delta f = 6$ Hz ($f_1 = 10$ Hz, $f_2 = 16$ Hz)

Modulation MSK

Rappel :

- Plus μ est petit, moins on utilise de bande passante
- Avec une CPFSK, on diminue la largeur de la bande passante
- Minimum Shift Keying (MSK) : plus petite valeur de μ permettant une probabilité d'erreur optimale ($\mu = 0.5$).
- MSK : CPFSK (cohérente) avec un filtre NRZ et $\Delta f = \frac{1}{2T}$

MSK



$d_n = 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$

$f_0 = 13$ Hz, Db=10 bits/seconde, $\Delta f = \frac{1}{2T} = 5$ Hz ($f_1 = 10.5$ Hz, $f_2 = 15.5$ Hz)