Communications numériques

Rappels de traitement du signal

Laurent Oudre
laurent.oudre@univ-paris13.fr

Université Paris 13, Institut Galilée
Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Parcours Informatique et Réseaux Apprentissage - 2ème année
2017-2018

Sommaire

Sommaire

Signaux continus et discrets

Il existe deux types de signaux temporels :

- **Continu :** signal connu à chaque instant t

$$\boxed{x(t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$$

  t : temps (souvent exprimé en secondes)
  Ex : onde électromagnétique, signal électrique, ...

- **Discret :** signal connu uniquement à certains instants t_n

$$\boxed{x_n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}}$$

  n : échantillon (sans unité)
  Ex : taux de précipitations enregistré chaque jour, cours de la bourse enregistré chaque heure, ...

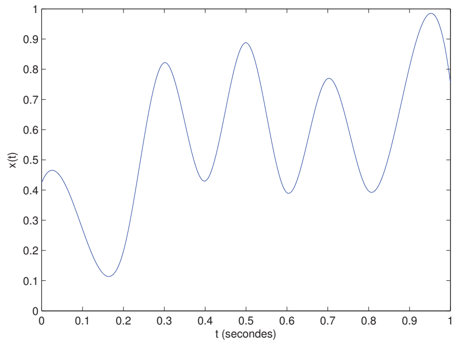
Signaux continus et discrets

En pratique

- Les signaux continus $x(t)$ ne sont pas stockables et étudiables sur ordinateur (ils contiennent une infinité de valeurs !). Ils peuvent être vus comme des fonctions mathématiques. On les étudie principalement pour avoir des modèles théoriques des signaux que l'on veut étudier. Ils modélisent des phénomènes physiques tels que les ondes acoustiques, les signaux électriques, etc...
- Les signaux discrets x_n au contraire peuvent être stockés et étudiés sur ordinateur. Ils ont en général un nombre fini de valeurs non nulles. Un signal discret est ainsi représenté comme un vecteur contenant toutes les valeurs x_n. On y associe un vecteur temps contenant toutes les valeurs t_n des instants où l'on connaît le signal.

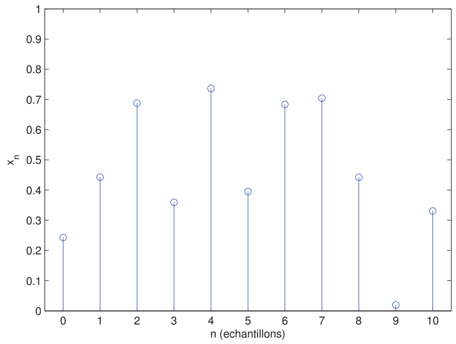
Remarque : Tous les signaux que nous allons étudier avec MATLAB sont donc des signaux discrets (et même numériques, cf prochain cours !). Les signaux continus seront seulement étudiés en TD avec des calculs théoriques.

Exemples



Signal continu $x(t)$

$t \in [0, 1]$



Signal discret x_n

$n \in [\![0, 10]\!]$

Echantillonnage

- Principe : Convertir un signal continu en un signal discret en ne stockant que ce qui se passe à certains instants t_n

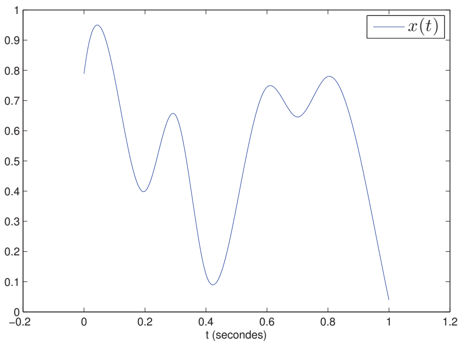
$$\boxed{x_n = x(t_n)}$$

- On ne va considérer ici que l'échantillonnage uniforme, c'est à dire qu'on prend une valeur toutes les T_s secondes, où T_s est fixe

$$\boxed{t_n = nT_s = \frac{n}{F_s}}$$

- T_s est appelée la **période d'échantillonnage** (en secondes)
- $\boxed{F_s = \frac{1}{T_s}}$ est appelée la **fréquence d'échantillonnage** (en Hertz)
- Une seconde de signal correspond à F_s échantillons.
- L'indice s correspond au mot *sampling* en anglais qui veut dire *échantillonnage*

Exemple

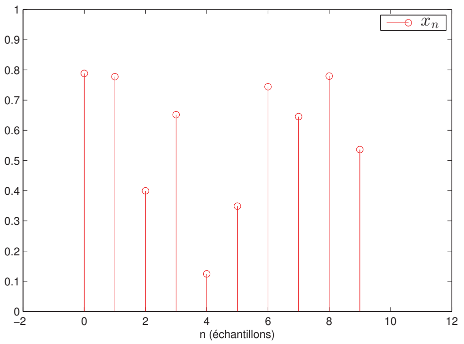


- Signal continu $x(t)$ défini sur $t \in [0, 1[$
- On prend une valeur toutes les 0.1 secondes en commençant par $t = 0$ et en s'arrêtant à $t = 0.9$:
  - $T_s = 0.1$ secondes
  - $F_s = 10$ Hz
- Temps t_n définis par

$$t_n = nT_s = \frac{n}{F_s} \text{ pour } n \in [\![0, 9]\!]$$

$$t_0 = 0, t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \cdots$$

Exemple

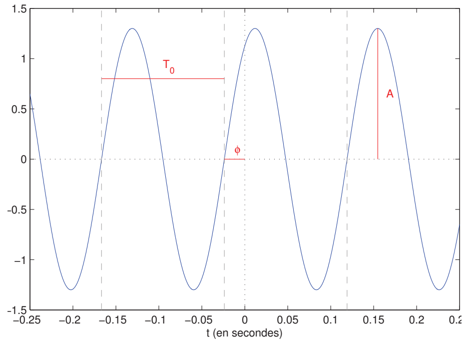


- On range chaque valeur

$$x(t_n) = x(nT_s) = x\left(\frac{n}{F_s}\right)$$

dans un vecteur (ou un tableau)
- $x_n = x(t_n)$ avec $n \in [\![0, 9]\!]$
- Le signal est stocké sur $N = 10$ échantillons
- Sous MATLAB on stocke également pour chaque signal un vecteur temps t_n qui contient tous les temps pour lesquels le signal a été stocké

Sinusoïde



$A = 1.3,\ f_0 = 7$ Hz, $\phi = \frac{\pi}{3}$

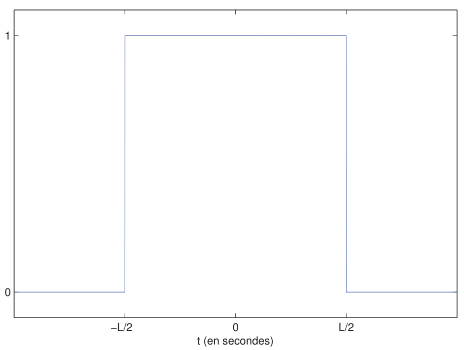
$$\boxed{x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)}$$

- A : amplitude
- f_0 : fréquence fondamentale (en Hz)
- ϕ : phase à l'origine
- $x(t)$ est périodique de période fondamentale

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{f_0}}$$

- Très utile pour modéliser des ondes simples

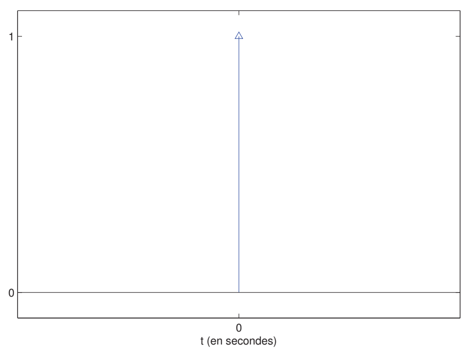
Signal porte



$$\boxed{\Pi_L(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{L}{2} \leq t < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Très utile pour faire les calculs : un signal quelconque de support temporel borné égal à L peut être vu comme le produit d'un signal à support temporel non borné et d'une fonction porte
- On travaille aussi souvent sur une version périodisée de ce signal : signal carré ou en créneau

Dirac



$$\boxed{\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

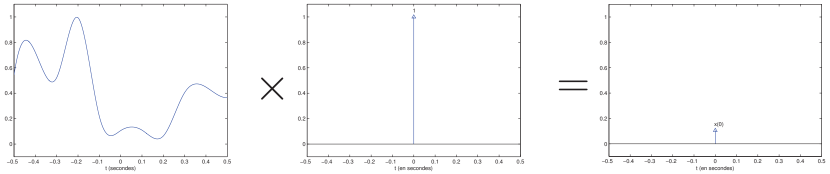
- En théorie, ce *signal* n'est pas un signal mais ce qu'on appelle une distribution (hors programme)
- Il vérifie la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- On le représente par une flèche entre 0 et 1 (attention à ne pas confondre avec un signal discret). La valeur 1 représente la masse (ou *amplitude*) du Dirac.

Dirac

- Si on prend un signal quelconque $x(t)$ et qu'on le multiplie par un Dirac, on obtient un Dirac de masse $x(0)$



- On a donc :

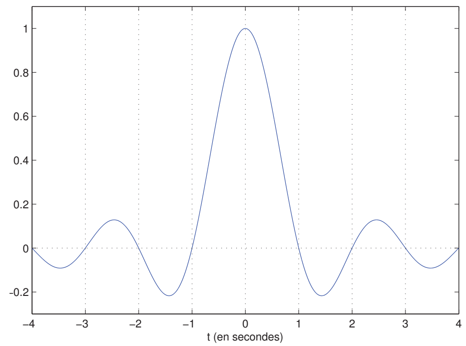
$$x(t) \times \delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- Plus généralement on a la propriété :

$$x(t) \times \delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ce *signal* est très utile pour établir des propriétés d'échantillonnage, mais il ne peut pas exister dans la vie réelle.

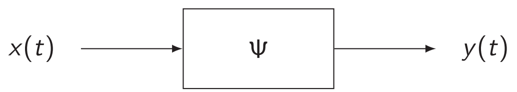
Sinus cardinal



$$\boxed{\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{sinon} \end{cases}}$$

- Comme nous le verrons, ce signal apparaîtra naturellement quand nous allons calculer la transformée de Fourier d'un signal porte
- Il est aussi très utilisé en physique ondulatoire
- Ce signal s'annule pour tous les temps t entiers

Qu'est-ce que le filtrage ?



Transformation Ψ d'un signal d'entrée $x(t)$ en un signal de sortie $y(t)$

$$y(t) = \Psi(x(t))$$

Utilisation

- Les filtres sont présents partout : ordinateurs, téléphones, télévisions, appareils photos, etc...
- Les **filtres analogiques** sont réalisés avec des composants électroniques (résistance, condensateur, inductance, transistor, etc...)
- Les **filtres numériques** sont réalisés par des circuits intégrés, des processeurs programmables (DSP, microcontrôleur), ou du code source sous forme logicielle

Filtre linéaire

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Filtrage linéaire : sortie du filtre s'écrit sous la forme :

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau) d\tau}$$

$$y(t) = (h * x)(t)$$

$*$: produit de convolution

$\boxed{h(t) \text{ : réponse impulsionnelle}}$

Produit de convolution

- Il est défini de la façon suivante :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\, g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\, f(\tau) d\tau$$

- Quelques propriétés :
  - Commutativité : $f * g = g * f$
  - Distributivité : $f * (g + h) = f * g + f * h$
  - Associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Le Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre du produit de convolution :

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, x(t) d\tau = x(t)$$

Produit de convolution

- De la même façon, on a :

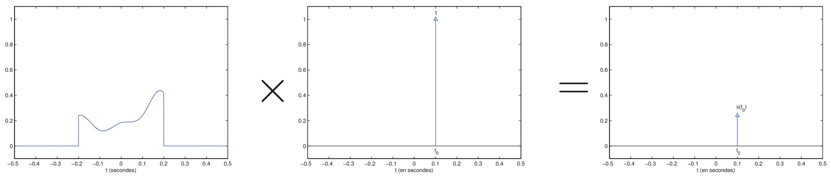
$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t-t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0)\, x(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0)\, x(t-t_0) d\tau \\ &= x(t-t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0)\, d\tau \\ &= x(t-t_0) \end{aligned}$$

- Convoluer un signal par un Dirac centré en t_0 revient à translater le signal de t_0

Attention !

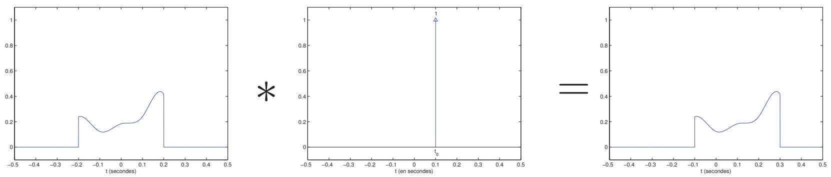
- Produit par un Dirac centré en t_0

$$x(t) \times \delta(t-t_0) = x(t_0)\, \delta(t-t_0)$$



- Produit de convolution par un Dirac centré en t_0

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$



Réponse impulsionnelle

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Si $x(t) = \delta(t)$, alors

$$y(t) = (h * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(t)$$

$\longrightarrow$ $h(t)$ = sortie du filtre lorsqu'on lui met un Dirac en entrée d'où le nom de **réponse impulsionnelle**

Transformée de Fourier

- Principe : décomposer un signal $x(t)$ (complexe ou réel) comme une somme pondérée d'une infinité de sinusoïdes (avec des fréquences et des phases à l'origine différentes).
- En étudiant les coefficients de pondérations associés à chaque fréquence fondamentale, on peut observer certaines propriétés du signal non visibles dans le domaine temporel
- Au lieu de représenter $x(t)$ en fonction du temps, on étudiera $X(f)$ (coefficient de pondération associé aux sinusoïdes de fréquence fondamentale f) en fonction de la fréquence f

Définition

- On définit la transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$:

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j2\pi ft} dt}$$

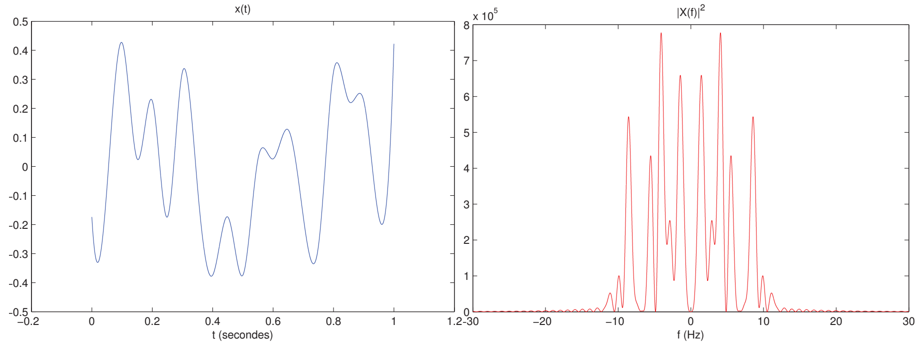
  Attention $X(f)$ est une quantité complexe ! !
- On peut également définir une transformée de Fourier inverse :

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ e^{j2\pi ft} df}$$

Interprétation d'un spectre

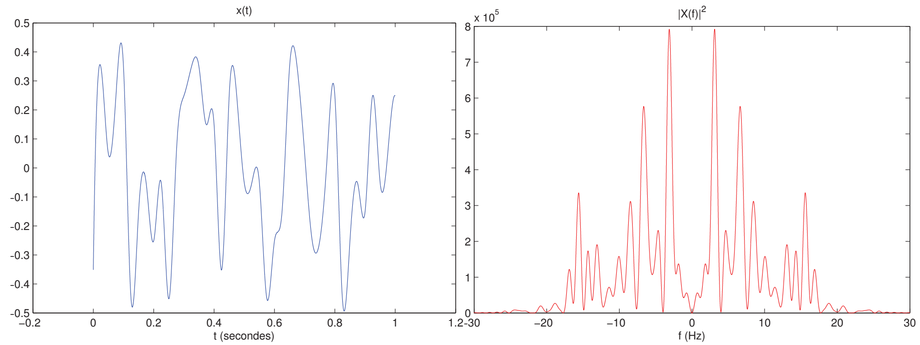
- Comme $X(f)$ est à valeurs complexes, on ne peut pas le tracer
- On appelle spectre d'un signal la quantité $|X(f)|^2$ que l'on trace en fonction de la fréquence f
- Si le signal temporel $x(t)$ est réel, alors $X(-f) = X^*(f)$ donc il suffit d'étudier $|X(f)|^2$ pour les fréquences positives.
- Observer le spectre d'un signal permet de l'analyser de façon plus pertinente parfois que dans le domaine temporel

Interprétation d'un spectre



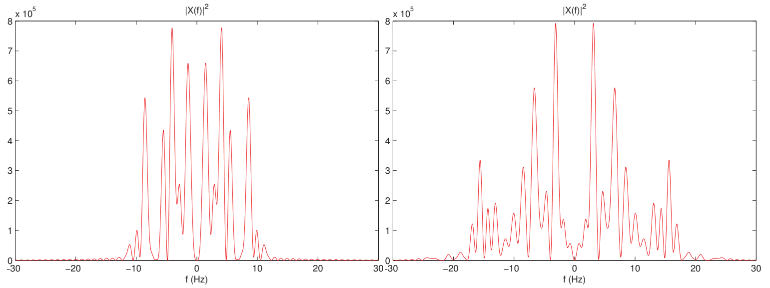
Signal lent : le module au carré $|X(f)|^2$ est élevé dans les basses fréquences
Les sinusoïdes de basses fréquences fondamentales contribuent plus que les autres

Interprétation d'un spectre



Signal plus rapide : le module au carré $|X(f)|^2$ est élevé aussi dans les fréquences plus élevées
Les sinusoïdes de plus hautes fréquences fondamentales contribuent aussi

Notion de largeur de bande



- Si on compare ces deux spectres, on voit que les valeurs élevées sont comprises entre -10 Hz et 10 Hz pour le premier, et entre -20 Hz et 20 Hz pour le second
- Les deux signaux n'occupent pas le même support fréquentiel.

Notion de largeur de bande

- On appelle **largeur de bande** d'un signal et on note $B = [f_{min}, f_{max}]$ avec $f_{min} \geq 0$ et $f_{max} \geq 0$ la plage de fréquences qu'un signal occupe.
- Dans notre exemple, on a :

$$B_1 = 0 - 10 \text{ Hz} \qquad B_2 = 0 - 20 \text{ Hz}$$

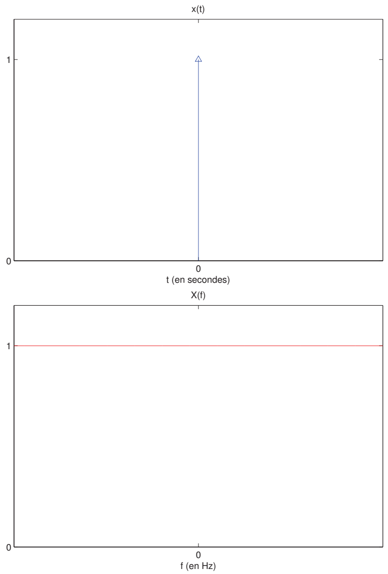
- Attention, pour déterminer la largeur de bande, il ne faut considérer que les fréquences positives !
- Dans le cas où $f_{min} = 0$ on dit que le signal est en **bande de base**, et on note plus simplement $B = f_{max}$
- Dans notre exemple, on écrirait plus simplement $B_1 = 10$ Hz et $B_2 = 20$ Hz

Propriétés

On peut démontrer les propriétés suivantes :

- Linéarité :
$$\mathcal{TF}\{\lambda x(t) + y(t)\} = \lambda X(f) + Y(f)$$
- Translation :
$$\mathcal{TF}\{x(t-t_0)\} = e^{-2\pi j f t_0} X(f)$$
- Modulation :
$$\mathcal{TF}\left\{x(t)e^{2\pi j f_0 t}\right\} = X(f-f_0)$$
- Convolution :
$$\mathcal{TF}\{x(t) * y(t)\} = X(f) \times Y(f)$$
- Multiplication :
$$\mathcal{TF}\{x(t) \times y(t)\} = X(f) * Y(f)$$

Transformée de Fourier d'un Dirac

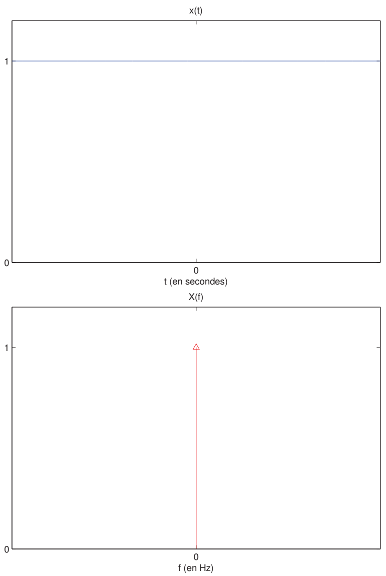


$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi f t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi f \times 0}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\{\delta(t)\} = 1}$$

Ce *signal*, très localisé dans le domaine temporel, a une largeur de bande infinie

Transformée de Fourier d'une constante



$$\begin{aligned}\mathcal{TF}^{-1}\{\delta(f)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f)e^{j2\pi f t}df \\ &= e^{j2\pi 0 \times t} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\{1\} = \delta(f)}$$

Ce signal, ayant un support temporel infini, est très localisé dans le domaine fréquentiel

Dirac translaté - Exponentielle complexe

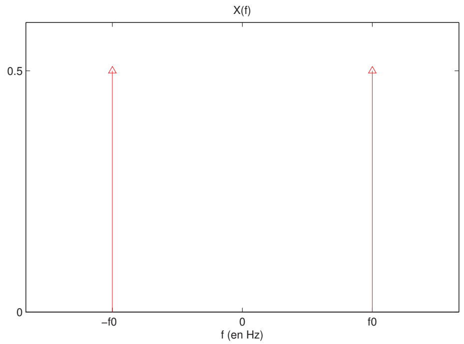
Grâce aux propriétés démontrées dans la partie précédente, on sait que :

$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\{\delta(t-t_0)\} &= e^{-j2\pi f t_0}\mathcal{TF}\{\delta(t)\} \\ &= \boxed{e^{-j2\pi f t_0}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\} &= \mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t} \times 1\right\} \\ &= \boxed{\delta(f-f_0)}\end{aligned}$$

Au passage on peut remarquer que, même si la fonction $e^{j2\pi f_0 t}$ n'est ni d'énergie finie ni réelle, il est néanmoins possible de définir sa transformée de Fourier.

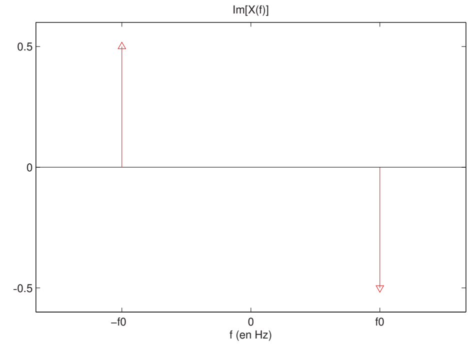
Cosinus



En utilisant la formule d'Euler on peut définir et calculer la transformée de Fourier de la fonction cosinus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left\{\cos\left(2\pi f_0 t\right)\right\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}+\mathcal{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\right] \\
&= \boxed{\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}}
\end{aligned}$$

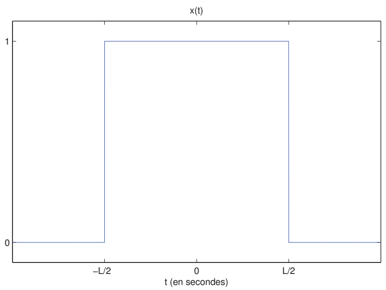
Sinus

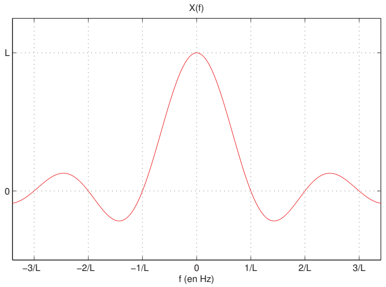


De la même façon, on peut définir et calculer la transformée de Fourier de la fonction sinus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left\{\sin\left(2\pi f_0 t\right)\right\} &= \mathcal{TF}\left\{\frac{e^{j2\pi f_0 t}-e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right\} \\
&= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{TF}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}-\mathcal{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\right] \\
&= \boxed{\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}}
\end{aligned}$$

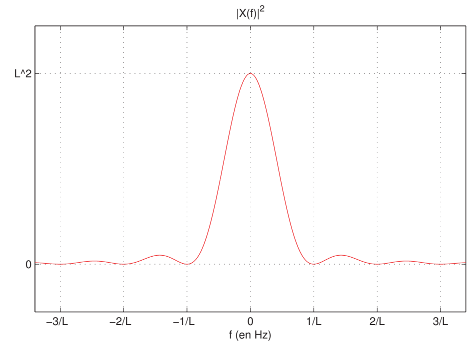
Fonction porte





$$\begin{aligned}
\mathcal{TF}\left\{\Pi_L(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Pi_L(t)e^{-j2\pi f t}dt \\
&= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} e^{-j2\pi f t}dt \\
&= \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \\
&= \frac{1}{-j2\pi f}\left[e^{-j\pi f L}-e^{j\pi f L}\right] \\
&= \frac{1}{\pi f}\times\frac{e^{j\pi f L}-e^{-j\pi f L}}{2j} \\
&= \frac{1}{\pi f}\times\sin\left(\pi f L\right) \\
&= L\times\frac{\sin\left(\pi f L\right)}{\pi f L} \\
&= \boxed{L\,\mathrm{sinc}\left(Lf\right)}
\end{aligned}$$

Fonction porte



- La largeur de bande de la fonction porte est en théorie infinie, mais si l'on trace le module au carré de la transformée de Fourier, on voit que la majorité des intensités se situe dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{L},+\frac{1}{L}\right]$
- En première approximation on peut donc utiliser $B\approx\frac{1}{L}$ (on utilise ici la notation de la bande de base)
- Plus ce signal a un support temporel important (L grand), plus sa largeur de bande est petite (et inversement).

Conséquences du filtrage linéaire dans le domaine fréquentiel

- Si on prend la transformée de Fourier de la relation de filtrage linéaire on a

$$\begin{aligned}\mathcal{TF}\{y(t)\} &= \mathcal{TF}\{h(t) * x(t)\} \\ &= \mathcal{TF}\{h(t)\} \times \mathcal{TF}\{x(t)\}\end{aligned}$$

- Ceci nous donne donc une relation fondamentale pour le filtrage linéaire :

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Filtrer un signal revient donc à multiplier son spectre par une quantité $H(f) = \mathcal{TF}\{h(t)\}$ et donc à agir sur la répartition de l'énergie sur les fréquences du spectre.

Filtre linéaire dans le domaine fréquentiel

$$X(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(f)$$

Dans le domaine fréquentiel :

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$\boxed{H(f) = \mathcal{TF}\{h(t)\} : \textbf{ fonction de transfert} \text{ du filtre}}$

Fonction de transfert

- Un filtre linéaire est donc totalement défini par sa fonction de transfert $H(f)$
- $H(f)$ est une quantité complexe, donc on observe son module $|H(f)|^2$
- Le filtrage linéaire est une opération qui modifie le spectre du signal, c'est à dire son contenu fréquentiel

Bande passante

- En regardant le carré du module de la fonction de transfert $|H(f)|^2$ on va pouvoir savoir quel type d'effets le filtre aura
- Les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2$ est elevé seront conservées (ou amplifiées) dans le signal filtré
- Les fréquences pour lesquelles $|H(f)|^2$ est faible seront supprimées (ou atténuées) dans le signal filtré
- De la même façon qu'on a défini une largeur de bande pour un signal, on va définir une bande passante pour un filtre
- On appelle **bande passante** d'un filtrage et on note $BP = [f_{min}, f_{max}]$ avec $f_{min} \geq 0$ et $f_{max} \geq 0$ la plage de fréquences qu'un filtre laisse passer

Bande passante vs. largeur de bande

- La largeur de bande B correspond à l'occupation spectrale d'un signal : il s'agit d'indiquer dans quel intervalle de fréquences les composantes fréquentielles sont non-négligeables.
- La bande passante BP est utilisée pour caractériser un système (par exemple un filtre, ou un canal de transmission). Il s'agit d'indiquer la plage de fréquences dans laquelle le système est capable de traiter ou de transmettre un signal.
- Dans la pratique, il arrive souvent que l'on utilise indifféremment ces deux expressions pour parler d'un signal ou d'un système. Ceci est dû au fait qu'en communications numériques, on s'arrange en général pour que la largeur de bande du signal à transmettre soit compatible avec la bande passante du canal de transmission.

Énergie et puissance moyenne totale

- L'énergie totale E_x d'un signal $x(t)$ peut se calculer soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel :

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}$$

- On peut également définir la notion de puissance moyenne totale P_x qui est homogène à une énergie divisée par un temps :

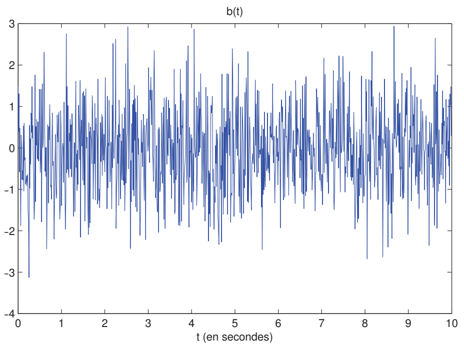
$$\boxed{P_x = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt}$$

Sommaire

Signaux déterministes, signaux aléatoires

- Jusqu'à présent, nous disposions pour tous les signaux que nous avons étudiés d'une équation qui nous donnait l'expression de $x(t)$ en fonction de t ou x_n en fonction de n : on dit que ces signaux sont **déterministes**
- Dans la vraie vie en revanche, on ne dispose pas d'une équation pour tous les signaux !
- Certains phénomènes (les perturbations par exemple) sont a priori inconnus et aléatoires. On n'est pas capable de dire précisément les valeurs que ces signaux vont prendre, mais on sait par exemple que leur amplitude sera de tel ordre de grandeur, ou que *en général* ils auront des fréquences dans une certaine bande, etc... On dit que ces signaux sont **aléatoires**

Notion de bruit blanc

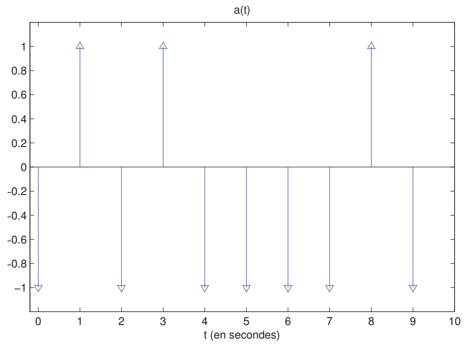


Ici $\sigma^2 = 1$

Un bruit blanc $b(t)$ est un signal aléatoire qui prend des valeurs au hasard à chaque instant t

- Les valeurs prises à chaque instant sont toutes indépendantes les unes des autres et suivent toutes la même loi (exemple : bruit blanc Gaussien)
- La moyenne de ce signal est égale à 0
- La variance du signal est égale à σ^2
- Plus σ^2 est élevé, plus le bruit blanc a tendance à prendre des valeurs éloignées de 0 et plus les amplitudes sont élevées (en valeur absolue)
- Très utilisé pour modéliser des perturbations dont on ne connaît que l'ordre de grandeur (paramétré par σ^2)

Emission de symboles aléatoires



Ici $T = 1$ seconde et $a_k = \pm 1$

On envoie un symbole a_k aléatoirement choisi dans un dictionnaire toutes les T secondes

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta(t - kT)$$

- On définit un dictionnaire (par exemple $a_k = \pm 1$)
- A chaque instant $t = kT$ on envoie au hasard un symbole du dictionnaire
- Les symboles émis sont indépendants, et on suppose que chaque symbole a une même probabilité d'apparition (dans notre exemple, chacun des 2 symboles du dictionnaire a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'apparaître)
- Plus T est petit, plus les symboles sont émis rapidement

Transformée de Fourier ?

- Nous avons vu que pour les signaux déterministes, il était important de les étudier dans le domaine fréquentiel pour mieux comprendre leurs propriétés
- Comment faire pour un signal aléatoire ? Par définition, à chaque nouveau signal que l'on génère, on aura un signal différent et on aura une transformée de Fourier différente !
- On va définir par analogie un outil, appelé **densité spectrale de puissance (DSP)**, permettant d'observer le contenu fréquentiel d'un signal aléatoire *en moyenne*

Densité spectrale de puissance

- Pour un signal déterministe à énergie finie, on a :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

où E_x est l'énergie totale
$|X(f)|^2$ peut être vue comme une densité spectrale d'énergie

- Pour un signal aléatoire, on va définir la densité spectrale de puissance $\Gamma_x(f)$, comme la quantité vérifiant :

$$\boxed{P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(f) df}$$

où P_x est la puissance moyenne totale

- $\Gamma_x(f)$ donne la répartition de la puissance selon les fréquences f
- Analogie entre $|X(f)|^2$ pour l'énergie dans le cas déterministe, et $\Gamma_x(f)$ pour la puissance dans le cas aléatoire

Bruit blanc

- Dans le cas d'un bruit blanc, comme tout est aléatoire et indépendant, il n'y a pas de raison qu'une fréquence ait plus d'importance que les autres. La densité spectrale de puissance est donc constante.
- Pour un bruit blanc $b(t)$ de variance σ^2, on a donc :

$$\boxed{\Gamma_b(f) = \sigma^2}$$

- On remarque qu'on a donc $P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 df = +\infty$! Un bruit blanc n'existe donc pas dans la réalité physique, car sa puissance moyenne totale est infinie !
- Au lieu d'utiliser σ^2, il est courant d'introduire $N_0 = 2\sigma^2$ (en Watt par Hertz) et d'écrire :

$$\boxed{\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}}$$

Emissions de symboles aléatoires

- Dans le cas d'une émission de symboles aléatoires indépendants toutes les T secondes

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, \delta(t - kT)$$

On peut montrer que

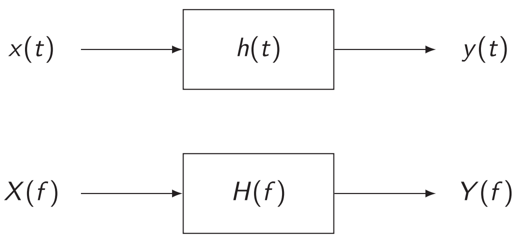
$$\boxed{\Gamma_a(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{\mu_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}$$

- μ_a et σ_a^2 sont respectivement la moyenne et la variance des symboles du dictionnaire
- Exemple : si $a_k \pm 1$, alors

$$\mu_a = \frac{1}{2}(-1+1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{2}((-1-0)^2 + (1-0)^2) = 1$$

Filtrage des signaux aléatoires



- Dans le cas déterministe, on a $Y(f) = X(f)H(f)$
- Si l'on suppose maintenant que le signal $x(t)$ est aléatoire, que devient l'expression ?
- $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre, c'est donc une quantité déterministe dont on peut prendre la transformée de Fourier
- En revanche, $y(t)$ dépend de $x(t)$, il est donc également aléatoire !

Formule de Wiener Lee

Considérons :

- Un signal aléatoire $x(t)$ de DSP $\Gamma_x(f)$ que l'on filtre avec un filtre linéaire de fonction de transfert $H(f)$.
- Alors la DSP $\Gamma_y(f)$ de la sortie du filtre $y(t)$ vérifie la relation suivante :

$$\boxed{\Gamma_y(f) = |H(f)|^2 \, \Gamma_x(f)}$$

Exemple

$$b(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow n(t)$$

Considérons :

- Un bruit blanc $b(t)$ de densité spectrale de puissance $\Gamma_b(f) = \frac{N_0}{2}$
- Un filtre passe-bas idéal h ayant comme fonction de transfert :

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| < f_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la puissance du bruit $n = b * h$ obtenu à la sortie du filtre ?

Solution

- n est un signal aléatoire et d'après la formule de Wiener-Lee on a :

$$\Gamma_n(f) = |H(f)|^2 \, \Gamma_b(f) = |H(f)|^2 \, \frac{N_0}{2}$$

- D'après la définition de la densité spectrale de puissance on a donc :

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_n(f) df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-f_c}^{+f_c} 1^2 df \\ &= N_0 f_c \end{aligned}$$

Rapport signal sur bruit

- Etant donné un signal $x(t)$ déterministe corrompu par un bruit blanc additif $b(t)$, le signal bruité $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = x(t) + b(t)$$

- On appelle le rapport signal sur bruit, la quantité :

$$\boxed{SNR = \frac{P_x}{P_b}}$$

  Plus cette quantité est élevée, moins le bruit n'a d'importance
- On exprime souvent cette quantité en décibels :

$$\boxed{SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_b} \right)}$$